Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet

GG, EH, TH, PK, JT, LT, VÄ

Harjoitus 2

19–23.9.2016, viikko 38

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 26.9.2016 klo. 16.00.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Olkoon $f : X \to Y$ ja $g : Y \to X$ funktioita siten, että $g(f(x)) = x$ kaikilla $x \in X$. Osoita, että f on injektio ja g on surjektio. Anna esimerkki tällaisista joukoista ja funktioista siten, että f ei ole surjektio eikä g ole injektio jolloin siis ei päde $f(g(y)) = y$ kaikilla $y \in Y$.

P2. Oleta, että R ja S ovat kaksi symmetristä relaatiota joukossa X (eli joukon $X \times X$ osajoukkoja). Ovatko seuraavat relaatiot symmetrisiä (aina, ei koskaan, riippuu relaatioista R ja S)? Perustele lyhyesti!

(a) $R \cup S$,
(b) $R \cap S$,
(c) $R \setminus S$,
(d) $R \circ S$.

Yhdistetty relaatio $R \circ S$ on siis relaatio $\{\, [x, z] \in X \times X : \exists y \in X([x, y] \in S \text{ AND } [y, z] \in R) \,\}$.

P3. Jos meidän pitää laskea x^n ja laskemme $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x^2 \cdot x$ jne. niin joudumme laskemaan $n - 1$ kertolaskua. Tehokkaampi tapa on laskea $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$ jne. ja sitten kertoa tarvittavat x^{2^j}:n potenssit keskenään jotta saisimme tulokseksi x^n. Osoita, että kertolaskujen lukumäärä tällä menetelmällä on $O(\log(n))$ missä $\log$ on luonnollinen logaritmi $\ln$.

P4. Osoita, että relaatio

$$R = \big\{ \big[[m, n], [p, q] \big] : m \cdot q = n \cdot p \big\}$$

joukossa $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ on ekvivalenssirelaatio käytämällä pelkästään kokonaislukujen laskutoimituksia ja -sääntöjä (eli ei mitään jakolaskuja) mutta voit olettaa tunnetuksi, että kahden kokonaisluvun tulo on 0 ainoastaan jos ainakin toinen luvuista on 0.
Mitä tämän relaation ekvivalenssiluokat ”ovat”?

P5. Konstruoi bijektio $f : [0, 1[\to [0, 1]$ ja huomaa, että 1 kuuluu maalijoukkoon mutta ei määrittelyjoukkoon.

Vihje: Voit helposti konstruoida injektion määrittelemällä $f(x) = x$ kun $0 \leq x < 1$. Silloin ei ole olemassa $x \in [0, 1[$ siten, että $f(x) = 1$ mutta voit korjata tämän puutteen muuttamalla funktion määritelmää siten, että $f(\frac{1}{2}) = 1$ (eikä $\frac{1}{2}$). Tämä ei vieläkään ole bijektio mutta jatka funktion ”korjaamista” niin että saat bijektion.