Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet
Harjoitus 6
12.10–16.10.2015, viikko 42

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen,Ääri

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 19.10.2015 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Joukko opiskelijoita aikoo osallistua kurssien $K_1, \dots, K_6$ kokeisiin seuraavasti:

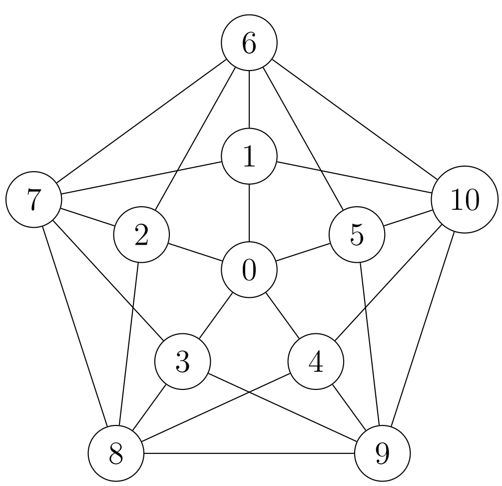
Opisk. A	K_1	K_3	
Opisk. B	K_1	K_4	K_5
Opisk. C	K_2	K_6	
Opisk. D	K_2	K_3	K_6
Opisk. E	K_3	K_4	
Opisk. F	K_3	K_5	
Opisk. G	K_5	K_6	

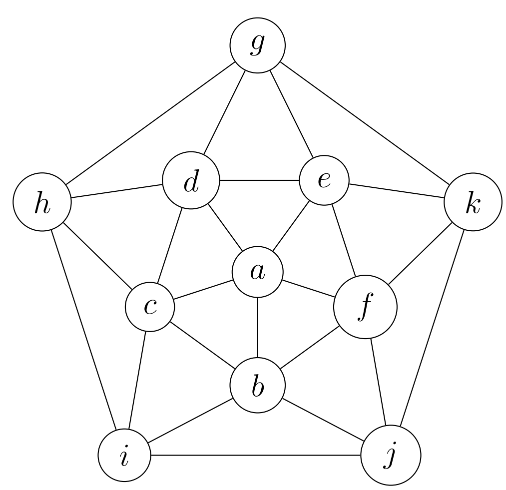
Piirrä verkko, jonka solmut ovat K_j, $j = 1, 2, \dots 6$ siten, että solmujen K_j ja K_k välillä on kaari jos ja vain jos ainakin yksi opiskelija aikoo osallistua sekä kurssin K_j että kurssin K_k tenttiin. Määritä verkon kromaattinen luku, eli pienin lukumäärä värejä, joilla verkon solmuja voidaan värittää niin että solmut, joiden välillä on kaari tulevat väritetyiksi eri väreillä. Mitä tämä luku kertoo tässä tapauksessa?

P2.

(a) Määritä alla olevien verkkojen jokaisen solmun naapureiden lukumäärä ja kirjoita molempien verkkojen kohdalla nämä luvut jonona ei-kasvavassa suuruusjärjestyksessä. Ovatko jonot identtiset?

(b) Ovatko alla olevat verkot isomorfiset? Perustele!





P3. Verkon $[V, E]$ solmut ovat listat $[s_1, s_2, s_3]$ missä $s_j \in \{1, 2\}$, $j = 1, 2, 3$. Solmujen $[s_1, s_2, s_3]$ ja $[t_1, t_2, t_3]$ välillä on suuntamaaton kaari jos ja vain jos $|s_1 - t_1| + |s_2 - t_2| + |s_3 - t_3| = 1$. Piirrä tämä verkko ja järjestä (eli numeroi) sen solmut siten, että ahne väritysalgoritmi käyttää 3 väriä.

Vihje: Piirrä ensin esimerkiksi solmut $[1, s_2, s_3]$ *ja sitten solmut* $[2, s_2, s_3]$.

P4. Olkoon $[V, E]$ suuntaamaton verkko, joka on yksinkertainen (eli $\{v, v\} = \{v\} \notin E$ kaikilla $v \in V$) ja missä $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Olkoon $n(v)$ solmun v naapureiden lukumäärä (eli solmun aste). Mitkä seuraavista listoista voi olla lista $[n(1), n(2), n(3), n(4), n(5)]$ ja mitkä eivät voi olla?

(a) $[1, 3, 3, 4, 2]$, (b) $[2, 2, 2, 4, 4]$, (c) $[1, 2, 3, 4, 4]$

Perustele piirtämällä verkko kun se on mahdollista ja selitä miksei se ole mahdollista muissa tapauksissa.

Vihje: Koska verkko on suuntaamaton ja yksinkertainen niin summa $\sum_{j=1}^{5} n(j)$ *voidaan esittää kaarien lukumäärän* $|E|$ *avulla.*

P5. Määritelmän mukaan verkko on metsä jos se on yksinkertainen (mistään solmusta ei ole kaari samaan solmuun) ja jokaisesta solmusta on korkeintaan yksi yksinkertainen polku jokaiseen toiseen solmuun eli siinä ei ole yhtään yksinkertaista sykliä.

(a) Osoita, että jos metsässä on solmu, jolla on täsmälleen yksi naapuri niin on olemassa toinenkin solmu, jolla on täsmälleen yksi naapuri.

(b) Osoita, että jos talossa on vain yksi ulko-ovi, niin siinä on ainakin yksi huone, jossa on pariton määrä ovia.

Vihje: (b)-kohdassa voit muodostaa sopivan verkon ja poistaa siitä yksinkertaisten syklien kaareja kunnes saat metsän, jolloin voit soveltaa (a)-kohdan tulosta.