Aalto-yliopisto

MS-A0401 Diskreetin matematiikan perusteet

Gripenberg, Potka, Pöllänen, Tuhkanen, Ääri

Harjoitus 3

21–25.9.2015, viikko 39

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 28.9.2015 klo. 16.
Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Erään kurssin harjoitusryhmään on ilmoittautunut n opiskelijaa. Osoita, että ainakin kaksi ryhmän opiskelijoista ovat aikaisemmin tavanneet yhtä monta ilmoittautuneista jollakin muulla kurssilla. (Tässä oletetaan, että "tavata"-relaatio on symmetrinen mutta irrefleksiivinen, eli katsotaan ettei kukaan ole aikaisemmin tavannut itseään.)
Vihje: Jos joku opiskelija on tavannut kaikki muut, niin montako ovat muut vähintään tavanneet?

P2. Eräs henkilö aikoo valita 100 päivää vuonna 2016 jolloin hän juoksee 10 kilometrin lenkin, 200 päivää jolloin hän juoksee 5 kilometrin lenkin ja 66 jolloin hän ei harrasta liikuntaa. Monellako tavalla hän voi tehdä nämä valinnat?

(a) Esitä vastaus multinomikertoimena.
(b) Laske vastaus käyttäen tuloperiaatetta jolloin hän ensimmäisessä vaiheessa valitsee ne 100 päivää jolloin hän juoksee 10 kilometrin lenkin ja sitten valitsee jäljella vapaana olevista päivistä ne jolloin hän jouksee 5 kilometrin lenkin ja esitä vastaus binomikertoimien avulla.
(c) Osoita, että (a) ja (b) kohtien vastaukset ovat samat, laskematta niitä auki.

P3. Joukossa X on n alkiota. Relaatio W joukossa X on asymmetrinen jos $[x, y] \in W \to [y, x] \notin W$ kaikilla x ja $y \in X$. Päättele montako asymmetristä relaatiota W on olemassa joukossa X esimerkiksi vastaamalla ensin seuraaviin kysymyksiin missä oletetaan, että $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$:

(a) Jos W on asymmetrinen niin päteekö $[x_i, x_i] \in W$ vai $[x_i, x_i] \notin W$?
(b) Jos $1 \le i < j \le n$ ja W on asymmetrinen, niin montako vaihtoehtoa on kun tarkastellaan ovatko parit $[x_i, x_j]$ ja/tai $[x_j, x_i]$ relaation W alkioita.
(c) Montako kokonaislukuparia $[i, j]$ löytyy siten, että $1 \le i < j \le n$?
(d) Laske asymmetristen relaatioiden lukumäärä (a)-, (b)- ja (c)-kohtien tulosten sekä tuloperiaatteen avulla.

P4.

(a) Monellako tavalla voidaan luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9 laittaa järjestykseen jos vaaditaan, että kaikki parittomat luvut esiintyvät toistensa perässä.
(b) Monellako tavalla voidaan luvut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8 laittaa järjestykseen jos vaaditaan, että mikään pariton luku ei tule toisen parittoman luvun jälkeen?

Vastaus: (a) 14400, (b) 2880

P5. Osoita, että $|\mathbb{N}_0| < |\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}|$ missä siis $\{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ on kaikkien funktioiden $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}$ joukko seuraavalla tavalla:

(a) Konstruoi injektio: $\mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$.
(b) Osoita, ettei löydy surjektiota $h : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$.

Vihje: (a)-kohdassa on monta yksinkertaista (?) vaihtoehtoa ja (b)-kohdassa kannattaa tehdä vastaoletus, että tällainen surjektio h löytyy ja sitten johtaa siitä ristiriita konstruoimalla funktio f, joka kuuluu joukkoon $\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ mutta $f \neq h(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Jos $n \in \mathbb{N}_0$ niin $h(n)$ on funktio $\mathbb{N}_0 \to \{0,1\}$ eli $h(n)(j) \in \{0,1\}$ kaikilla $j \geq 0$. Määrittele funktiosi f lukujen $h(n)(n)$ avulla. Kun h, kuten tässä, on funktio, jonka arvot ovat funktioita, voit $h(n)$:n sijasta kirjoittaa h_n jos se tekee asian yksinkertaisemmaksi.