

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 14.9.2015 klo. 16.

Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!

P1. Kirjoita seuraavat joukot muodossa { lauseke : ehto }:

- (a) $\{\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \dots\}$.
- (b) $\{\dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$.
- (c) $\{3, 6, 11, 18, 27, 38, \dots\}$.

P2. Esitä seuraavat väitteet logiikan ja joukkopin merkinnöillä AND, OR, NOT, \rightarrow , \forall , \exists , \in , \mathbb{R} ja \mathbb{Z} (missä \forall on kaikki- eli universaali-kvanttori, \exists on olemassaolo-kvanttori, \mathbb{R} on reaalilukujen joukko ja \mathbb{Z} on kokonaislukujen joukko) sekä normaaleilla matemaattisilla merkinnöillä ja suluilla:

- (a) ”Jos x on reaaliluku mutta ei ole kokonaisluku niin $x \cdot 3$ ei myöskään ole kokonaisluku.”
- (b) ”Jokaisella kokonaisluvulla y on olemassa kokonaisluku x siten että $y = 2 + x$.”
- (c) ”On olemassa negatiivinen reaaliluku x siten, että kaikilla kokonaisluvuilla y pätee $y < 2 \cdot x$ tai $y > x$.”

Mitkä näistä väitteistä ovat tosia?

P3. Osoita induktion avulla, että

$$\sum_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \geq 1.$$

Vihje: Kun pitää osoittaa, että kaksi lauseketta antavat saman tuloksen niin on usein (sekä paperilla, että tietokoneella laskettaessa) yksinkertaisinta osoittaa, että niiden erotus on 0.

P4. Jos X on joukko niin $\mathcal{P}(X)$ on X :n osajoukkojen muodostama joukko, eli $A \in \mathcal{P}(X)$ jos ja vain jos $A \subseteq X$. Jos nyt X ja Y ovat kaksi joukkoa niin päteekö aina $\mathcal{P}(X \cup Y) = \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$? Perustelet!

P5. Todista seuraavat väitteet oikeiksi:

- (a) Jos a ja b ovat kokonaislukuja ja $(a^2 - 4 \cdot b) \cdot b^2$ on pariton, niin a ja b ovat molemmat parittomia.
- (b) Jos a , b ja c ovat kokonaislukuja, $a^3 \mid b$ ja $b^2 \mid c$ niin $a^6 \mid c$, missä merkintä $m \mid n$ tarkoittaa, että kokonaisluku n on kokonaisluvulla m jaollinen eli on olemassa kokonaisluku k siten, että $n = k \cdot m$.

Vihje: Käytä toiseen tapaukseen suoraa ja toiseen epäsuoraa (tai käänteistä suoraa) todistusta.