# MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
# Esimerkkejä ym., osa I

G. Gripenberg

Aalto-yliopisto

21. tammikuuta 2016

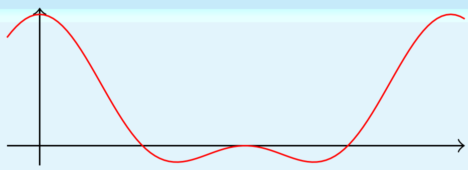
## Vektoreista

- $\mathbb{R}$ *on reaalilukujen joukko ja* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \,\}$ *on* $xy$*-tason pisteitä.*
- *Jokaista pistettä tai paria* $(x, y)$ *voimme käsitellä vektorina, jonka voimme myös esittää joko pystyvektorina* $(2 \times 1$*-matriisina)* $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, *vaakavektorina* $(1 \times 2$*-matriisina)* $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ *tai muodossa* $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ *(missä siis* $\mathbf{i}$ *on positiivisen* $x$*-akselin suuntainen yksikkövektori jne.)*
- *Jos* $\mathbf{u}$ *on vaakavektori* $\begin{bmatrix} u(1) & u(2) \end{bmatrix}$ *ja* $\mathbf{v}$ *on pystyvektori* $\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \end{bmatrix}$ *niin niiden matriisitulo on* $\mathbf{uv} = u(1)v(1) + u(2)v(2)$. *Jos emme tee eroa vaaka- ja pystyvektoriden välillä voimme myös kirjoittaa tätä pistetulona (sisätulona, skalaaritulona)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- *Vektorin pituuden määritelmäksi otamme* $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.
- *Vektorit* $\mathbf{u}$ *ja* $\mathbf{v}$ *ovat kohtisuorassa tosiaan vastaan jos* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- $\mathbb{R}^d = \{\, (x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, d \,\}$ *ja kun* $\mathbb{R}^2$ *korvataan* $\mathbb{R}^d$*:llä niin "ainoastaan" kuvien piirtäminen tulee vaikeammaksi.*

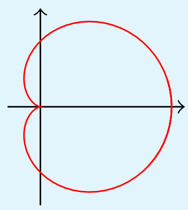


## Funktioista

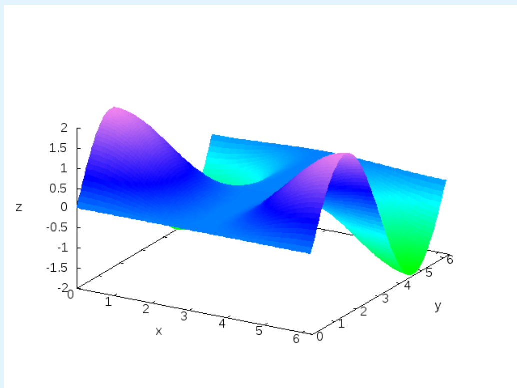
- $f(x) = (1 + \cos(x))\cos(x)$ *on yhden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*) jolla on kuvaaja:*



- *Funktio* $\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} (1 + \cos(t))\cos(t) \\ (1 + \cos(t))\sin(t) \end{bmatrix}$ *on yhden reaalimuuttujan vektoriarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*) jonka kuvajoukko on käyrä:*



- *Funktio* $h(x, y) = (1 + \cos(x))\sin(y)$ *on kahden reaalimuuttujan reaaliarvoinen funktio (eli funktio:* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*), jota voi myös käsitellä yhden vektorimuuttujan funktiona* $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = (1 + \cos(x))\sin(y)$ *ja jolla on seuraava kuvaaja:*




*Huomaa, että* $f$*:n kuvaaja on käyrä, jolla on parametriesitys* $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ (1 + \cos(t))\cos(t) \end{bmatrix}$.

## Muuttujat, parametrit, vakiot

*Jos sylinterin muotoisella putkella on pituus $L$, sisähalkaisija $r$, seinämän paksuus $h$ ja materiaalin tiheys on $\rho$ niin putken massa*

$$m = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big).$$

*Riippuen tilanteesta voimme tämän kaavan avulla määritellä erilaisia funktioita:*

- $m = f(L) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *kun pidämme suureita $\rho$, $r$ ja $h$ parametreina, eli käsittelemme eripituisia putken pätkiä.*
- $m = f(L, r, h, \rho) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *missä meillä on neljä muuttujaa.*
- $m = f\left(\begin{bmatrix} L \\ r \\ h \end{bmatrix}\right) = \rho \cdot L \cdot \pi\big((r+h)^2 - r^2\big)$ *missä meillä on yhden vektorimuuttujan funktio ja pidämme $\rho$:ta parametrina.*

*Kaikissa näissä tapauksissa pidämme $\pi$:tä vakiona mutta jos $\pi$:n paikalle sijoitetaan (epätarkka) likiarvo ja haluamme selvittää mikä on tämän approksimaation vaikutus voi syntyä tilanteita missä $\pi$:tä käsitellään muuttujana tai parametrina.*



## Muuttujat, parametrit, vakiot, jatk.

*Jos käytämme* `Matlab/Octavea` *voimme esimerkiksi kirjoittaa*

```
rho=7.87
f=@(L,r,h) rho*L*pi*((r+h)^2-r^2)
```

*tai jos käytämme vektoriargumenttiä*

```
rho=7.87
f=@(X) rho*X(1)*pi*((X(2)+X(3))^2-X(2)^2)
```

*Huomaa, että jos muutamme* `rho`*:n arvoa niin meidän pitää toistaa funktion* `f` *määritelmää!*

## Kuristusperiaate

*Jos meidän pitää määrittää raja-arvo*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2},$$

*niin voimme yrittää käyttää kuristusperiaatetta jos arvelemme, että raja-arvo on* 0 *ja silloin meidän pitää korvata* $\frac{5x^2y^2}{x^4+y^2}$ *suuremmalla funktiolla (kun olemme ottaneet itseisarvon, mikä tässä ei ole tarpeen) jolle on helpompaa osoittaa, että raja-arvo on* 0. *Voimme ensin todeta, että* $x^4 \geq 0$ *josta seuraa, että* $x^4 + y^2 \geq y^2$ *jolloin*

$$0 \leq \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{5x^2y^2}{y^2} = 5x^2.$$

*Nyt on selvää (?), että*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5x^2 = \lim_{x\to 0} 5x^2 = 5\cdot 0^2 = 0,$$

*ja näin ollen saamme kuristusperiaatteen nojalla*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^4+y^2} = 0.$$



## Esimerkki: Raja-arvo

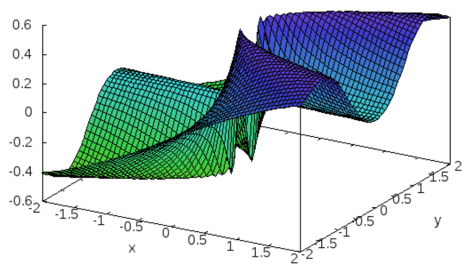
*Jos haluamme määrittää raja-arvon* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, *niin voimme laskea raja-arvon sädettä* $(\alpha t, \beta t)$ *pitkin ja kun määrittelemme* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ *saamme*

$$\lim_{t\to 0+} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t\to 0+} \frac{\alpha t \beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} = \lim_{t\to 0} t\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+\beta^4 t^2} = 0$$

*Tästä seuraa* (**ainoastaan!**), *että* **jos** *raja-arvo on olemassa niin se on* 0.
*Nyt osoittautuu, että raja-arvoa ei ole olemassa koska jos valitsemme* $x = t^2$ *ja* $y = t$ *ja laskemme raja-arvon kun* $t \to 0+$

$$\lim_{t\to 0+} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0+} \frac{t^2t^2}{(t^2)^2+t^4} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

*josta seuraa ettei* $f(x,y)$ *ole "lähellä"* 0 *jos* $(x,y)$ *on "riittävän lähellä"* $(0,0)$.



## Derivoimisjärjestyksen vaihto

*Oleta, että funktion $f(x,y)$ osittaisderivaatat $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$ ja $f_{yx}(x,y)$ ovat olemassa (ainakin) kaikissa pisteissä $(x,y)$ joilla $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ ja, että funktiot $f_{xy}(x,y)$ ja $f_{yx}(x,y)$ ovat jatkuvia pisteessä $(x_0,y_0)$. Silloin pätee $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.*

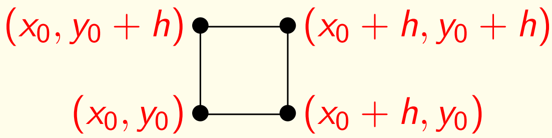
## Todistus

*Olkoon $0<h<\frac{\delta}{2}$ ja määrittele funktiot $u$ ja $v$ siten, että*

$$u(x)=f(x,y_0+h)-f(x,y_0) \quad \text{ja} \quad v(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y).$$

*Funktio $u$ on derivoituva välillä $(x_0,x_0+h)$ ja jatkuva välillä $[x_0,x_0+h]$ ja näin ollen väliarvolauseesta seuraa, että on olemassa luku $\theta_1\in(0,1)$ siten, että*

$$u(x_0+h)-u(x_0)=hu'(x_0+\theta_1 h).$$




$$u(x_0+h)-u(x_0)=v(y_0+h)-v(y_0)$$



## Todistus, jatk.

*Koska $hu'(x_0+\theta_1 h)=h(f_x(x_0+\theta_1 h,y_0+h)-f_x(x_0+\theta_1 h,y_0))$ voimme soveltaa väliarvolausetta vielä kerran funktioon $y\mapsto f_x(x_0+\theta_1 h,y)$ ja saamme*

$$u(x_0+h)-u(x_0)=h^2 f_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 h),$$

*missä $\theta_2\in(0,1)$.*
*"Samalla tavalla" toteamme myös, että*

$$v(y_0+h)-v(y_0)=h^2 f_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h),$$

*missä $\theta_3$ ja $\theta_4\in(0,1)$. Nyt $u(x_0+h)-u(x_0)=v(y_0+h)-v(y_0)$ koska molemmat lausekkeet ovat $f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$ josta seuraa, että*

$$h^2 f_{xy}(x_0+\theta_1 h,y_0+\theta_2 h)=h^2 f_{yx}(x_0+\theta_4 h,y_0+\theta_3 h).$$

*Jos nyt jaamme $h^2$:lla, otamme raja-arvon kun $h\to 0$ ja käytämme hyväksi oletusta, että $f_{xy}$ ja $f_{yx}$ ovat jatkuvia, niin saamme väitteen $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.*

## Esimerkki: Osittaisderivaattoja

*Jos* $f(x,y,z) = \ln\left(1+e^{x+yz^2}\right)$ *niin* $f$*:n osittaisderivaatat ovat seuraavat:*

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\left(1+e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2},$$
$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\ln\left(1+e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}z^2,$$
$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\left(1+e^{x+yz^2}\right) = \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}2yz.$$

*Näin ollen funktion* $f$ *derivaatta eli gradientti on*

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= Df(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) \\ &= \left[\frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}, \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}z^2, \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}2yz\right] \\ &= \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}\,\mathbf{i} + \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}z^2\,\mathbf{j} + \frac{1}{1+e^{x+yz^2}}\,e^{x+yz^2}2yz\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$



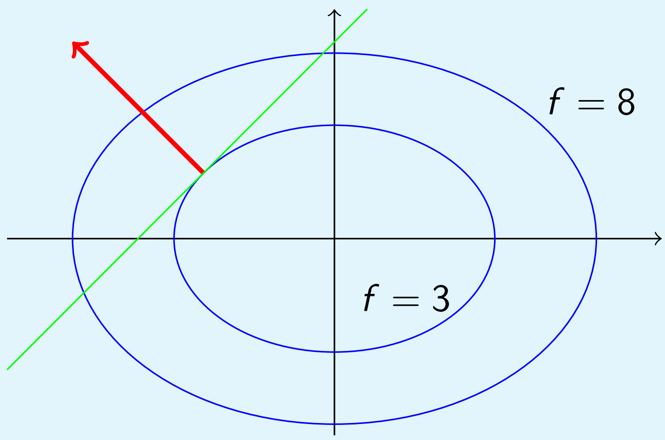
## Esimerkki: Gradientti ja tasa-arvokäyrä

*Jos* $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ *niin sen gradientti eli eli derivaatta on*

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} x & 2y \end{bmatrix} = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j}$$

*ja erityisesti pisteessä* $(-2,1)$ *gradientti on* $-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$. *Funktion pisteen* $(-2,1)$ *kautta kulkeva tasa-arvokäyrä on (ellipsi)* $\{\,(x,y) : \frac{1}{2}x^2 + y^2 = 3\,\}$ *ja alla olevasta kuviosta nähdään, että gradientti on kohtisuorassa tasa-arvokäyrää ja sen tangenttia pisteessä* $(-2,1)$ *vastaan.*

*Koska gradientti pisteessä* $(2,1)$ *on* $-2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ *niin tätä vastaan kohtisuorassa olevan, pisteen* $(-2,1)$ *kautta kulkevan suoran suuntavektori on* $2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j}$ *jolloin tämän suoran yhtälö on* $y - 1 = x + 2$ *eli* $y = x + 3$.



## Derivaatta ja koordinaattisysteemi

*Edellä annetun määritelmän mukaan esimerkiksi funktion* $f(x,y) = xy$ *derivaatta eli gradientti on* $\mathbf{f}'(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, *mutta tässä määritelmässä meillä on oletuksena, että koordinaattisysteemi on kiinnitetty. Jos valitsemme toisen, st-koordinaattisysteemin, esimerkiksi (kiertämällä xy-systeemin koordinaattiakseleita 45°) siten, että*

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x+y \\ y-x \end{bmatrix},$$

*niin* $f(s,t) = \frac{1}{2}(s^2 - t^2)$ *ja* $f'(s,t) = \begin{bmatrix} s & -t \end{bmatrix} = s\,\mathbf{u} - t\,\mathbf{v}$ *missä* $\mathbf{u}$ *ja* $\mathbf{v}$ *ovat s- ja t-akselien suuntaisia kantavektoreita, eli* $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ *ja* $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{i})$.

*Näin ollen voimme todeta, että derivaatta pisteessä* $\mathbf{x}$ *"oikeasti" on lineaarikuvaus* $\mathbf{h} \mapsto f'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ *ja tämän lineaarikuvauksen matriisiesitys (jota sitten käytetään laskuissa) riippuu käytetystä koordinaattisysteemistä.*

*Samalla tavalla voimme sanoa, että funktion* $g(x) = x^2$ *derivaatta pisteessä* $x = 2$ *ei ole luku* $g'(2) = 4$ *vaan lineaarikuvaus "neljällä kertominen":* $t \mapsto 4t$.



## Derivaatan tulosääntö ketjusäännön avulla

*Derivaatan tulosääntö sanoo tunnetusti, että* $(fg)' = f'g + fg'$.
*Vaihtoehtoinen lähestymistapa on seuraava: Kirjoita* $p(t) = f(t)g(t)$ *yhdistettynä funktiona* $p(t) = (h \circ k)(t) = h(k(t))$ *missä* $h : \mathbb{R}^2 \to R$ *on* $h\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xy$ *ja* $k(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$. *Derivaatan määritelmän nojalla*

$$h'\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad k'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix}.$$

*Ketjusäännön mukaan pätee silloin*

$$p'(t) = h'(k(t))k'(t) = \begin{bmatrix} g(t) & f(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \end{bmatrix} = g(t)f'(t) + f(t)g'(t).$$

## Laplacen yhtälö $u_{xx} + u_{yy} = 0$ napakoordinaateissa

*Oletamme, että $u$ toteuttaa ns. Laplacen yhtälön $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ja tehtävänä on selvittää minkä yhtälön funktio $v(r, \theta) = u(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ toteuttaa. (Tässä siis $v$ on funktio $u$ esitettynä napakoordinaattien funktiona).*
*Osittaisderivaattoja laskemalla (ja ketjusääntöä hyväksi käyttäen) toteamme, että*

$$\begin{aligned} v_r(r,\theta) &= u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta) + u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta), \\ v_\theta(r,\theta) &= u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(-r\sin(\theta)) + u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\cos(\theta). \end{aligned}$$

*Osoittautuu, että meidän ei tarvitse laskea $v_{r\theta} = v_{\theta r}$ (mutta tämä ei ole lainkaan etukäteen selvää) mutta sen sijaan meidän pitää laskea*

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\theta) = u_{xx}&(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta)^2 \\ &+ 2u_{xy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\cos(\theta)\sin(\theta) \\ &+ u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\sin(\theta)^2, \end{aligned}$$



## Laplacen yhtälö napakoordinaateissa, jatkuu

*ja*

$$\begin{aligned} v_{\theta\theta}(r,\theta) = u_{xx}&(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r^2\sin(\theta)^2 \\ &+ 2u_{xy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))(-r^2\cos(\theta)\sin(\theta)) \\ &+ u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r^2\cos(\theta)^2 \\ &- u_x(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\cos(\theta)) - u_y(r\cos(\theta), r\sin(\theta))r\sin(\theta). \end{aligned}$$

*Oletuksen mukaan $u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$, erityisesti*

$$u_{xx}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + u_{yy}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0,$$

*ja tämän sekä kaavan $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$ avulla näemme, että*

$$v_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}v_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}(r,\theta) = 0$$

## Esimerkki: Suunnatut derivaatat

*Jos funktio $f$ on kolmen muuttujan derivoituva funktio ja en suunnatut derivaatat pisteessä $\mathbf{x}_0$ suuntiin $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ja $\mathbf{u}_3 = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ovat 1, 2 ja 3 niin voimme määrittää derivaatan pisteessä $\mathbf{x}_0$ koska vektorit $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ja $\mathbf{u}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia (eli erisuuntaisia): Oletamme, että $f'(\mathbf{x}_0) = A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}$ jolloin suunnatun derivaatan määritelmän nojalla saamme yhtälösysteemin*

$$\begin{aligned}
1 &= D_{\mathbf{u}_1} f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{\sqrt{2}} B, \\
2 &= D_{\mathbf{u}_2} f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} B - \frac{1}{\sqrt{2}} C, \\
3 &= D_{\mathbf{u}_3} f(\mathbf{x}_0) = (A\,\mathbf{i} + B\,\mathbf{j} + C\,\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} + \mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{\sqrt{2}} C.
\end{aligned}$$

*Matriisimuodossa tämä systeemi ja sen ratkaisu ovat*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$



## Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka

*Oletamme, että neste virtaa tasossa siten, että nopeus pisteessä $(x, y)$ hetkellä $t$ on $u(x, y, t)\mathbf{i} + v(x, y, t)\mathbf{j}$. Jos nyt haluamme määrittää hetkellä $t$ pisteessä $(x, y)$ sijaitsevan "nestepartikkelin" kiihtyvyys niin ensin oletamme, että partikkelin sijainti hetkellä $t$ on $(X(t), Y(t))$ (jolloin siis $X(t) = x$ ja $Y(t) = y$ jos se on pisteessä $(x, y)$ hetkellä $t$). Silloin nopeus on $X'(t)\,\mathbf{i} + Y'(t)\,\mathbf{j}$, josta seuraa, että $X'(t) = u(X(t), Y(t), t)$ ja $Y'(t) = v(X(t), Y(t), t)$. Kiihtyvyys taas on $X''(t)\,\mathbf{i} + Y''(t)\,\mathbf{j}$ ja ketjusäännön nojalla*

$$\begin{aligned}
X''(t) &= u_x(X(t), Y(t), t)X'(t) + u_y(X(t), Y(t), t)Y'(t) \\
&\qquad + u_t(X(t), Y(t), t) \\
&= u_x(X(t), Y(t), t)u(X(t), Y(t), t) + u_y(X(t), Y(t), t)v(X(t), Y(t), t) \\
&\qquad + u_t(X(t), Y(t), t) \\
&= u_x(x, y, t)u(x, y, t) + u_y(x, y, t)v(x, y, t) + u_t(x, y, t),
\end{aligned}$$

*missä viimeisellä rivillä käytimme oletusta $x(t) = x$ ja $Y(t) = y$.*

## Esimerkki: Ketjusääntö ja virtausmekaniikka, jatk.

*Samalla tavalla saamme*

$$Y''(t) = v_x(x,y,t)u(x,y,t) + v_y(x,y,t)v(x,y,t) + v_t(x,y,t).$$

*Näin ollen kiihtyvyys on*

$$\begin{aligned}&\big(u_x(x,y,t)u(x,y,t) + u_y(x,y,t)v(x,y,t) + u_t(x,y,t)\big)\,\mathbf{i}\\ &\qquad + \big(v_x(x,y,t)u(x,y,t) + v_y(x,y,t)v(x,y,t) + v_t(x,y,t)\big)\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

*Huomaa, että tämä on epälineaarinen lauseke eli jos $u$ korvataan $u_1 + u_2$:lla ja samoin $v$ korvataan $v_1 + v_2$:lla niin tulos ei ole kahden lausekkeen summa missä toisessa esiintyy $u_1$ ja $v_1$ ja toisessa $u_2$ ja $v_2$. Suuri osa virtausmekaniikan hankaluuksista on seuraus tästä epälineaarisuudesta.*



## Milloin pätee $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ kun kun $\|x\|, \|y\| \le \rho$?

*Jos $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ on jatkuvasti derivoituva, niin jokainen komponentti $f_j$, $1 \le j \le m$, on jatkuvasti derivoituva ja löytyy luvut $c_j$ siten, että $\|f_j'(\mathbf{v})\| \le C$ kun $\|\mathbf{v}\| \le \rho$. Jos nyt $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ ovat sellaisia, että $\|\mathbf{x}\| \le \rho$ ja $\|\mathbf{y}\| \le \rho$ niin määritellään funktio $h$ kaavalla $h_j(t) = f_j((1-t)\mathbf{y} + t\mathbf{x})$. Silloin $h_j$ on derivoituva reaaliarvoinen funktio ja väliarvolauseen nojalla*

$$f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y}) = h_j(1) - h_j(0) = h_j'(t_j)(1-0),$$

*missä $t_j \in (0,1)$. Ketjusäännön nojalla*

$$h_j'(t_j) = f_j'((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

*joten*

$$|f_j(\mathbf{x}) - f_j(\mathbf{y})| = |h_j(1) - h_j(0)| \le \|f_j'((1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})\|\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le c_j\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

*koska* $\|(1-t_j)\mathbf{y} + t_j\mathbf{x})\| \le (1-t_j)\|\mathbf{y}\| + t_j\|\mathbf{x}\| \le \rho$. *Näin ollen* $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \le C\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ *missä* $C = \sqrt{c_1^2 + \ldots + c_m^2}$.

## Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \geq c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ kun kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$?

*Ei välttämättä jos $d>1$, $\mathbf{g}:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ on jatkuvasti derivoituva, $\rho>0$ ja $\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\|>0$ kun $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ ja $\|\mathbf{u}\|=1$ kuten seuraava esimerkki näyttää:*

*Olkoon* $\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix}$ *kun* $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$. *Silloin*

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v}) = \frac{2\pi}{\rho} \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) & -e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) \\ e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \sin(\frac{2\pi t}{\rho}) & e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \cos(\frac{2\pi t}{\rho}) \end{bmatrix},$$

*Jos* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ *niin*

$$\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u} = \frac{2\pi}{\rho} e^{\frac{2\pi s}{\rho}} \begin{bmatrix} \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 - \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \\ \sin(\frac{2\pi t}{\rho})u_1 + \cos(\frac{2\pi t}{\rho})u_2 \end{bmatrix},$$



## Milloin pätee $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})-\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \geq c\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ kun kun $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \leq \rho$? jatk.

*joten*

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\right\|^2 = \frac{4\pi^2}{\rho^2} e^{\frac{4\pi x}{\rho}} \Big( &\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_1^2 - 2\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})\sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})u_1 u_2 \\ &+ \sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_2^2 + \sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_1^2 \\ &+ 2\cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})\sin(\tfrac{2\pi t}{\rho})u_1 u_2 + \cos(\tfrac{2\pi t}{\rho})^2 u_2^2 \Big) = e^{2x}\|\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}$$

*Tästä päättelemme, että jos $\|\mathbf{v}\| \leq \rho$, niin $s \geq -\rho$ ja*

$$\left\|\mathbf{g}'(\mathbf{v})\mathbf{u}\right\| \geq \frac{2\pi}{\rho} e^{-2\pi} \|\mathbf{u}\|,$$

*kaikilla vektoreilla* $\mathbf{u}$. *Jos nyt* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *ja* $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho \end{bmatrix}$ *niin* $\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y}) = 0$.

## Esimerkki: Tangenttitaso

*Jos haluamme määrittää funktion* $f(x,y)=x^2-y^2$ *kuvaajan tangenttitason kun* $x=2$ *ja* $y=1$ *niin kirjoitamme ensin yhtälön muodossa* $z=x^2-y^2$ *eli* $g(x,y,z)=0$ *missä* $g(x,y,z)=x^2-y^2-z$ *(vaikka se voisi yhtä hyvin olla* $g(x,y,z)=-x^2+y^2+z$*). Funktion* $g$ *derivaatta on* $Dg(x,y,z)=2x\,\mathbf{i}-2y\,\mathbf{j}-\mathbf{k}$ *ja pisteessä* $(2,1,f(2,1))=(2,1,3)$ *tämä derivaatta on* $\mathbf{n}=4\,\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$*. Tämä vektori on pinnan* $g(x,y,z)=0$ *normaali pisteessä* $(2,1,3)$ *ja samalla pinnan tässä pisteessä otetun tangenttitason normaali. Koska* $(2,1,3)$ *on tangenttitason piste niin* $\mathbf{v}=(x-2)\,\mathbf{i}+(y-1)\,\mathbf{j}+(z-3)\,\mathbf{k}$ *on tangenttitason suuntainen vektori jos* $(x,y,z)$ *on myös tangenttitason piste. Näin ollen* $\mathbf{v}$ *on kohtisuorassa normaalia* $\mathbf{n}$ *vastaan eli* $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$ *ja tästä ehdosta saamme tangenttitason yhtälön*

$$4(x-2)-2(y-1)-(z-3)=0 \quad \text{eli} \quad 4x-2y-z=3.$$



## Lineaarinen approksimointi, suhteellinen virhe

*Jos meidän pitää arvioida virhettä, joka syntyy kun ympyräkartion tilavuus lasketaan kaavalla* $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ *ja tiedämme ainoastaan, että säteen* $r$ *mitatun arvon virhe on korkeintaan* $3\%$ *ja korkeuden* $h$ *mitatun arvon virhe on korkeintaan* $2\%$ *niin emme saa absoluuttista ylärajaa tilavuuden virheelle mutta saamme helposti approksimatiivisen ylärajan suhteelliselle virheelle seuraavalla tavalla: Lineaarisen approksimoinnin perusteella:*

$$\Delta V \;=\; V(r+\Delta r, h+\Delta h) - V(r,h) \;\approx\; V_r(r,h)\Delta r + V_h(r,h)\Delta h,$$

*josta seuraa, että*

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\frac{1}{3}2\pi r h\Delta r}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} + \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 \Delta h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = 2\cdot\frac{\Delta r}{r} + 1\cdot\frac{\Delta h}{h}.$$

*Koska oletamme, että* $|\frac{\Delta r}{r}|\le 0.03$ *ja* $|\frac{\Delta h}{h}|\le 0.02$ *niin*

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \lesssim 2\cdot 0.03 + 1\cdot 0.02 = 0.08,$$

*eli suhteellinen virhe on korkeintaan* $8\%$*.*

## Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

*Sylinterimäisen säiliön sisältämä nestemäärä, kun säiliön akseli on vaakasuorassa on* $V = L(r^2 \arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2})$ *missä* $L$ *on säiliön pituus, joka on noin* 2 *m,* $r$ *on säde, joka on noin* 50 *cm ja* $h$ *on nestepinnan korkeus, joka myös on noin* 50 *cm. Pituuden* $L$ *ja säteen* $r$ *pystymme mittaamaan* 1 *cm tarkkuudella. Miten tarkasti meidän on mitattava* $h$ *jotta saisimme nestemäärän lasketuksi* 50 *litran tarkkuudella?*
*Määrittelemme*

$$f(L,r,h) = L\Big(r^2 \arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2}\Big).$$

*Silloin (funktion* $\arccos(t)$ *derivaatta on* $-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$*)*

$$f_L(L,r,h) = \big(r^2 \arccos(1-\frac{h}{r}) - (r-h)\sqrt{2hr-h^2}\big)$$

$$f_r(L,r,h) = 2Lr\arccos(1-\frac{h}{r}) - Lr^2\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{h}{r})^2}}\frac{h}{r^2} - L\sqrt{2hr-h^2}$$
$$- L(r-h)\frac{h}{\sqrt{2hr-h^2}},$$



## Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

$$f_h(L,r,h) = Lr^2\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{h}{r})^2}}\cdot\frac{1}{r} + L\sqrt{2hr-h^2}$$
$$- L(r-h)\frac{r-h}{\sqrt{2hr-h^2}},$$

*ja erityisesti*

$$f_L(200,50,50) = \frac{\pi}{2}\cdot 2500 \approx 3927$$
$$f_r(200,50,50) = \frac{\pi}{2}\cdot 20000 - 10000 - 10000 \approx 11416,$$
$$f_h(200,50,50) = 10000 + 10000 = 20000.$$

*Lineaarisella approksimoinnilla saamme*

$$\Delta f \approx f_L\Delta L + f_r\Delta r + f_h\Delta h.$$

## Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

*josta seuraa, että*

$$|\Delta f| \lesssim |f_L||\Delta L| + |f_r||\Delta r| + |f_h||\Delta h| \leq 3927 \cdot 1 + 11416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h|$$

*koska* $|\Delta L| \leq 1$ *ja* $|\Delta r| \leq 1$. *Jos nyt haluamme, että* $|\Delta f| \leq 50 \cdot 10^3$ *niin meidän täytyy vaatia, että*

$$3927 \cdot 1 + 21416 \cdot 1 + 20000 \cdot |\Delta h| \leq 50000,$$

*ja tästä seuraa, että pitää olla* $|\Delta h| \leq 2.4$.

## Huom

*Tässä kuten muissa vastaavissa laskuissa* $\Delta L$ *on "virhe" tai "poikkeama" muuttujan* $L$ *arvossa, eli* $\Delta L = L - L_0$ *mutta* $\Delta$*:lla merkitään myös Laplacen differentiaalioperaattoria:* $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.



## Esimerkki: Lineaarinen approksimointi

*Funktiosta* $f$ *tiedämme, että* $f(3,2) = 2.7$, $f(3.1, 2.2) = 2.75$ *ja* $f(2.9, 2.1) = 2.68$. *Nyt voimme seuraavalla tavalla arvioida derivaattaa käyttäen mikä on* $f(3.2, 1.9)$*:*
*Lineaarisella approksimoinnilla saamme*

$$f(3 + \Delta x, 2 + \Delta y) \approx f(3,2) + f_x(3,2)\Delta x + f_y(3,2)\Delta y.$$

*Jos ensin valitsemme* $\Delta x = 0.1$ *ja* $\Delta y = 0.2$ *ja sitten* $\Delta x = -0.1$ *ja* $\Delta y = 0.1$ *niin saamme "yhtälösysteemin"*

$$\begin{aligned} 2.75 &= f((3 + 0.1, 2 + 0.2) \approx 2.7 + f_x(3,2) \cdot 0.1 + f_y(3,2) \cdot 0.2, \\ 2.68 &= f(3 - 0.1, 2 + 0.1) \approx 2.7 + f_x(3,2) \cdot (-0.1) + f_y(3,2) \cdot 0.1, \end{aligned}$$

*eli*

$$\begin{aligned} 0.5 &\approx f_x(3,2) + 2f_y(3,2), \\ -0.2 &\approx -f_x(3,2) + f_y(3,2). \end{aligned}$$

## Esimerkki: Lineaarinen approksimointi, jatk.

*Laskemalla yhteen saamme ensin* $f_y(3,2) \approx 0.1$ *ja sitten sijoittamalla tämän tuloksen ensimmäiseen yhtälöön saamme* $f_x(3,2) \approx 0.5 - 0.2 = 0.3$. *Jos nyt valitsemme* $\Delta x = 0.2$ *ja* $\Delta y = -0.1$ *niin lineaarisella approksimoinnilla saamme*

$$\begin{aligned} f(3.2, 1.9) &= f(3 + 0.2, 2 - 0.1) \\ &\approx f(3,2) + f_x(3,2) \cdot 0.2 + f_y(3,2) \cdot (-0.1) \\ &\approx 2.7 + 0.3 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot (-0.1) \\ &= 2.7 + 0.06 - 0.01 = 2.75. \end{aligned}$$

*Huomaa, että tässä virhelähteenä on myös epätarkkuudet osittaisderivaattojen arvoissa.*



## Differentiaali??

*Sanomme, että*

$$\psi = a(x,y)\,\mathrm{d}x + b(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

*on 1. kertaluvun differentiaalimuoto (tai differentiaalimuotokenttä koska kertoimet a ja b ovat muuttujien x ja y funktioita) tai lyhyemmin vain differentiaali. Tässä 1. kertaluvun tapauksessa voimme pitää* $\mathrm{d}x$ *symbolina, jota vastaa x-akselin suuntaista yksikkövektoria ja samoin* $\mathrm{d}y$ *symbolina jota vastaa y-akselin suuntaista yksikkövektoria jolloin differentiaalia* $\psi$ *vastaa vektorifunktio* $\begin{bmatrix} a(x,y) & b(x,y) \end{bmatrix}$.

*Tällaista differentiaalia voimme (kunhan kertoimet ovat esim. jatkuvia) integroida käyrää pitkin: Jos* $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, $t \in [a,b]$ *on suunnatun käyrän* $\mathcal{C}$ *parametriesitys (ja funktiot* $x(t)$ *ja* $y(t)$ *ovat esim. paloittain jatkuvasti derivoituvia) niin*

$$\int_{\mathcal{C}} \psi = \int_a^b \big(a(x(t),y(t))x'(t) + b(x(t),y(t))y'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

## Differentiaali??, jatk.

*Jos nyt* $a(x,y) = f_x(x,y)$ *ja* $b(x,y) = f_y(x,y)$ *niin ketjusäännön nojalla integroitavana on derivaatta jolloin saamme integraalin suoraan sijoittamalla ja*

$$\int_{\mathcal{C}} \psi = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(\mathcal{C}\text{:n loppupiste}) - f(\mathcal{C}\text{:n alkupiste}).$$

*Jos siis* $a(x,y) = f_x(x,y)$ *ja* $b(x,y) = f_y(x,y)$ *niin kirjoitamme* $\psi = \mathrm{d}f$, *sanomme, että* $\psi$ *on funktion* $f$ *kokonaisdifferentiaali ja*

$$\mathrm{d}f = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y,$$

*ja tämän vastine on approksimointikaavaa*

$$\Delta f \approx f_x \Delta x + f_y \Delta y.$$

*Mutta jos ei päde* $a(x,y) = f_x(x,y)$ *ja* $b(x,y) = f_y(x,y)$ *jollain funktiolla* $f$ *niin* $\int_{\mathcal{C}} \psi$ *on edelleen laskettavissa mutta tulos ei enää riipu pelkästään differentiaalista* $\psi$ *ja käyrän päätepisteistä vaan myös siitä miten käyrä kulkee alkupisteestä loppupisteeseen.*



## Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi?

*Oletamme, että funktio* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *on derivoituva ja sellainen, että on olemassa vakioita* $L$ *ja* $M$ *siten, että*

$$\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}+\mathbf{v}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\| \le L\|\mathbf{v}\| \quad \text{ja} \quad \|\mathbf{f}'(\mathbf{x})^{-1}\| \le M,$$

*kaikilla* $\mathbf{x}$ *ja* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ *(tai ainakin kun* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ *ja* $\|\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|$. *Lisäksi oletamme, että* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = \mathbf{0}$. *Jos käytämme Newtonin mentelmää yhtälösysteemin* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ *ratkaisemiseksi ja laskemme* $(\mathbf{x}_n)_{n=0}^{\infty}$ *niin pätee*

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_*\| \le \tfrac{1}{2} ML \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_*\|^2, \quad n \ge 1.$$

*Perustelu tähän on seuraava: Jos* $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ *on jatkuvasti derivoituva niin pätee* $\mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) = \int_0^1 (\mathbf{g}'(t) - \mathbf{g}'(0))\,\mathrm{d}t$. *Jos* $\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{h})$ *niin* $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x} + t\mathbf{h})\mathbf{h}$ *jolloin*

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h} &= \mathbf{g}(1) - \mathbf{g}(0) - \mathbf{g}'(0) \\ &= \int_0^1 \big(\mathbf{f}'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h} - \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

## Miksi Newtonin menetelmä konvergoi niin nopeasti kun se konvergoi? jatk.

*Tästä epäyhtälöstä ja oletuksista seuraa, että*

$$\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\| \leq \int_0^1 \left\|\mathbf{f}'(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\mathbf{h}-\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\| \mathrm{d}t$$
$$\leq \int_0^1 Lt\|\mathbf{h}\|^2 \,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}L\|\mathbf{h}\|^2.$$

*Jos nyt valitsemme* $\mathbf{x}=\mathbf{x}_n$ *ja* $\mathbf{h}=\mathbf{x}_*-\mathbf{x}_n$ *niin* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})=\mathbf{0}$ *ja*

$$\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\big(\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}\big),$$

*ja oletuksesta edellä johdetusta epäyhtälöstä seuraa, että*

$$\|\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_*\| \leq M\left\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)\mathbf{h}\right\| \leq \tfrac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*\|^2.$$

*Tästä tuloksesta seuraa, että* **ainakin** *jos* $\frac{1}{2}ML\|\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_*\|<1$ *jollain* $m\geq 0$ *niin vektorit* $\mathbf{x}_n$ *suppenevat kohti ratkaisua* $\mathbf{x}_*$ *ja kun* $\|\mathbf{x}_n-\mathbf{x}_*\|$ *on riittävän pieni, niin etäisyys ratkaisuun pienenee hyvin nopeasti.*