Aalto-yliopisto

Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
1. välikoe 26.1.2016

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

1.

(a) Missä xy-tason pisteissä funktio

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x+y}, & x > 0 \text{ ja } y > 0, \\ 0, & x \le 0 \text{ tai } y \le 0, \end{cases}$$

on jatkuva? Perustele lyhyesti!

(b) Olkoon $f(s,t) = g(s^2t + s, t^2 - s)$ eli f on funktion $g(x,y)$ ja funktion $h(s,t) = \begin{bmatrix} s^2t + s \\ t^2 - s \end{bmatrix}$ yhdistetty funktio. Oleta, että $f_s(-1,1) = 3$ ja $f_t(-1,1) = -1$. Määritä funktion g gradientti eli derivaatta pisteessä $(0,2)$.

Ratkaisu: (a) Kaikissa pisteissä missä $x > 0$ ja $y > 0$ funktio f on selvästikin jatkuva koska nimittäjä $x + y > 0$. Samoin kun $x < 0$ tai $y < 0$ niin f on jatkuva koska vakiofunktio 0 on jatkuva. Jos $x > 0$ ja $y > 0$ niin

$$|f(x,y)| \le \frac{y^2}{y} \le |y|,$$

ja tämä epäyhtälö pätee myös kaikissa muissa pisteissä koska siellä $f(x,y) = 0$. Koska $\lim_{y\to 0}|y| = 0$ niin todetaan kuristusperiaatteen nojalla, että

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0,0),$$

kaikilla x_0 eli funktio on myös jatkuva x-akselilla. Mutta jos $y_0 > 0$ niin selvästikin

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x>0}} f(x,y) = y_0 > 0,$$

kun taas määritelmästä seuraa heti, että

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0) \\ x<0}} f(x,y) = 0,$$

joten funktio on jatkuva kaikissa pisteissä paitsi pisteissä $(0,y)$ missä $y > 0$.

(b) Ketjusäännön mukaan

$$f_s(s,t) = g_x(s^2t + s, t^2 - s)(2st + 1) + g_y(s^2t + s, t^2 - s)(-1),$$

ja

$$f_t(s,t) = g_x(s^2t + s, t^2 - s)s^2 + g_y(s^2t + s, t^2 - s)2t.$$

Kun sijoitamme $s = -1$ ja $t = 1$ näihin yhtälöihin saamme yhtälösysteemin

$$\begin{aligned} -g_x(0,2) - g_y(0,2) &= 3, \\ g_x(0,2) + 2g_y(0,2) &= -1, \end{aligned}$$

josta saamme ratkaisuksi $g_y(0,2) = 2$ ja $g_x(0,2) = -5$ ja derivaatta eli gradientti on $-5\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix}$.

2.

(a) Määritä funktion $f(x,y,z) = x + yz + z^2$ suunnattu derivaatta pisteessä $(1,-1,-1)$ suuntaan $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(b) Määritä vakio c siten, että $u(x,y) = f(x^2 + cy^2)$ on osittaisdifferentiaaliyhtälön $yu_x(x,y) + 2xu_y(x,y) = 0$ ratkaisu kun f on mikä tahansa jatkuvasti derivoituva funktio.

Ratkaisu: (a) Funktion derivaatta eli gradientti on $f' = \nabla f = \mathbf{i} + z\mathbf{j} + (y+2z)\mathbf{k}$ ja pisteessä $(1,-1,-1)$ tämä gradientti on $\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Suunnattu derivaatta on näin ollen

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}} f(1,-1,-1) &= (\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \frac{1}{\|\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}\|} \\ &= (1+2-6)\frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = -1. \end{aligned}$$

(b) Jos $u(x,y) = f(x^2 + cy^2)$ niin $u_x(x,y) = f'(x^2+cy^2)2x$ ja $u_y(x,y) = f'(x^2+cy^2)2cy$ joten

$$yu_x(x,y) + 2xu_y(x,y) = f'(x^2+cy^2)2xy + f'(x^2+cy^2)4cxy = f'(x^2+cy^2)2xy(1+2c).$$

Näin ollen $yu_x(x,y) + 2xu_y(x,y) = 0$ riippumatta siitä mikä funktio f on jos (ja vain jos) $c = -\frac{1}{2}$.

---

3. Suure A lasketaan kaavasta $A = B^2 + 3BC$ kun $B \approx -2$ ja $C \approx 3$. Miten iso voi virhe C:n arvossa itseisarvoltaan korkeintaan olla jos tiedetään, että virhe B:n arvossa on itseisarvoltaan korkeintaan 0.006 ja vaaditaan, että lineaarinen approksimointi antaa A:n virheen itseisarvolle ylärajaksi 0.06?

Ratkaisu: Merkitään $f(B,C) = B^2 + 3BC$. Lineaarisella approksimoinnilla saamme

$$\Delta A = f(B + \Delta B, C + \Delta C) - f(B,C) \approx f_B(B,C)\Delta B + f_C(B,C)\Delta C.$$

Koska $f_B(B,C) = 2B + 3C$ ja $f_C(B,C) = 3B$ niin saamme

$$|\Delta A| \lesssim |2B + 3C||\Delta B| + |3B||\Delta B| \approx 5|\Delta B| + 6|\Delta C| \leq 5 \cdot 0.006 + 6|\Delta C|.$$

Jos nyt vaadimme, että $5 \cdot 0.006 + 6|\Delta C| \leq 0.06$ niin silloin pätee $|\Delta A| \lesssim 0.06$ niin kuin pitääkin. Tämä vaatimus toteutuu mikäli $6|\Delta C| \leq 0.06 - 5 \cdot 0.006 = 0.06 - 0.03 = 0.03$ eli $|\Delta C| \leq 0.005$.

---

4. Esitä miten Newtonin menetelmällä voidaan approksimatiivisesti ratkaista yhtälösysteemi

$$\begin{aligned} xy^2 &= 2xy + 2, \\ x^2 &= y + 2. \end{aligned}$$

Laske yksi iteraatiokierros alkuarvoilla $x_0 = -1$, $y_0 = 1$ tai selitä millä Matlab/Octaven komennoilla voisit laskea monta iteraatiokierrosta.

Ratkaisu: Määrittelemme

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} xy^2 - 2xy - 2 \\ x^2 - y - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

jolloin

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (y^2 - 2y) & (2xy - 2x) \\ 2x & -1 \end{bmatrix}.$$

Nyt on meidän on laskettava

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

ja kun $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ saamme

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jos jatkamme niin saamme

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1.875 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} -1.77580845771144 \\ 1.14365671641791 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} -1.4565425178698725 \\ 0.0195853660197867 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} -1.654228474061686 \\ 0.697392107120984 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} -1.76277021226461 \\ 1.09557751231530 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} -0.457391353578998 \\ -3.494807114374520 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} -0.212803613583630 \\ -2.014537784601791 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.270434510368320 \\ -2.160384260042447 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{11} = \begin{bmatrix} 0.266527224850446 \\ -1.928978505293638 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{12} = \begin{bmatrix} 0.263568222191502 \\ -1.930540547947547 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{13} = \begin{bmatrix} 0.263574121235135 \\ -1.930528682649925 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{14} = \begin{bmatrix} 0.263574121298157 \\ -1.930528682581904 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_{15} = \begin{bmatrix} 0.263574121298157 \\ -1.930528682581904 \end{bmatrix}$$

Matlab/Octavea varten määrittelemme ensin funktion f:

```
f=@(x)[x(1)*x(2)^2-2*x(1)*x(2)-2;x(1)^2-x(2)-2]
```

sitten derivaatan

```
fp=@(x)[x(2)^2-2*x(2),2*x(1)*x(2)-2*x(1);2*x(1),-1]
```

ja alkuarvon

```
x=[-1;1]
```

jonka jälkeen voimme toistaa komennon

```
x=x-fp(x)\f(x)
```

riittävän monta kertaa.