Aalto-yliopisto

Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem)
Tentti ja välikokeiden uusinta 8.3.2016

Kirjoita jokaiseen koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ym. tiedot !
Laskimia tai taulukoita ei saa käyttää tässä kokeessa!

Kirjoita selvästi jokaiseen paperiin minkä kokeen suoritat.
Tentin tehtävät ovat 1, 4, 5, 7 ja 8.
Uusintavälikokeiden tehtävät ovat:
1. vk: 1–4,
2. vk: 5–8.

1.

(a) Osoita, että $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$.

(b) Löytyykö funktio $f(x,y,z)$ jonka osittaisderivaatat x:n ja z:n suhteen ovat $2xy+z+y^2$ ja y^2+2x? Perustele!

Ratkaisu: (a) Jos $y \neq 0$ niin

$$\left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| \leq \frac{|x|y^2}{y^2} \leq |x|,$$

koska $x^4+y^2 \geq y^2$ ja jos $y=0$ niin $\frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0 \leq |x|$. Nyt $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x| = \lim_{x\to 0}|x| = 0$ ja kuristusperiaatteen nojalla seuraa, että $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0$.
(b) Jos $f_x(x,y,z) = 2xy+z+y^2$ niin $f_{xz}(x,y,z) = 1$ ja jos $f_z = y^2+2x$ niin $f_{zx}(x,y,z) = 2$ jolloin $f_{xz} \neq f_{zx}$ mikä on mahdotonta koska kaikki osittaisderivaatat ovat tässä tapauksessa jatkuvia. Näin ollen tällaista funktiota ei löydy.

2.

(a) Osoita, että funktio $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ toteuttaa differentiaalyhtälön $u_{xx}+u_{yy} = 0$ joukossa $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\,\}$.

(b) Funktio $u(t,x)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $u_t = 2u_{xx}$. Määritä positiivinen vakio c siten, että funktio $v(s,y) = u(2s, cy)$ toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $v_s = v_{yy}$.

Ratkaisu: (a)

$$\begin{aligned}
u_x(x,y) &= \frac{2x}{x^2+y^2},\\
u_y(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2},\\
u_{xx}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2},\\
u_{yy}(x,y) &= \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

josta seuraa, että

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2+2x(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4(x^2+y^2)-4x^2-4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$

(b) Ketjusäännön nojalla pätee

$$v_s(s,y) = 2u_t(2s,cy) \quad \text{ja} \quad v_{yy}(s,y) = c^2 u_{xx}(2s,cy).$$

Koska $u_t(t,x) = 2u_{xx}(t,x)$ niin pätee myös $u_t(2s,cy) = 2u_{xx}(2s,cy)$ eli

$$\frac{1}{2}v_s(s,y) = \frac{2}{c^2}v_{yy}(s,y) \quad \text{eli} \quad v_s(s,y) = \frac{4}{c^2}v_{yy}(s,y).$$

Tästä näemme, että jos valitsemme $c = 2$ niin pätee $v_s = v_{yy}$.

---

3. Funktiosta f tiedetään, että $f(2,3) = 1.57$, $f(2.1,2.9) = 1.55$ ja $f(1.9,2.8) = 1.56$. Määritä derivaatan avulla luvun $f(2.2,3.1)$ approksimaatio.

Ratkaisu: Koska $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$ niin saamme

$$\begin{aligned}
1.55 - 1.57 &= f(2+0.1, 3-0.1) - f(2,3) \approx f_x(2,3)\cdot 0.1 + f_y(2,3)\cdot(-0.1),\\
1.56 - 1.57 &= f(2-0.1, 3-0.2) - f(2,3) \approx f_x(2,3)\cdot(-0.1) + f_y(2,3)\cdot(-0.2),
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
-0.2 &\approx f_x(2,3) - f_y(2,3),\\
-0.1 &\approx -f_x(2,3) - 2f_y(2,3).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa $f_y(2,3) \approx 0.1$ ja $f_x(2,3) \approx -0.1$ jolloin

$$f(2.2,3.1) \approx f(2,3) + f_x(2,3)\cdot 0.2 + f_y(2,3)\cdot 0.1 \approx 1.57 - 0.1\cdot 0.2 + 0.1\cdot 0.1 = 1.56.$$

---

4. Esitä miten Newtonin menetelmällä voidaan approksimatiivisesti ratkaista yhtälösysteemi

$$\begin{aligned}
x^2 &= y+1,\\
y^2 &= x+2.
\end{aligned}$$

Laske yksi iteraatiokierros alkuarvoilla $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ tai selitä millä Matlab/Octaven komennoilla voisit laskea monta iteraatiokierrosta.

Ratkaisu: Kirjoitamme

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x^2 - y - 1 \\ y^2 - x - 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

joten

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix}.$$

Nyt meidän pitää laskea

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{f}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n),$$

ja samme

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Jos jatkamme saamme

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.8202 \\ 2.0496 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.7153 \\ 1.9311 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 1.7107 \\ 1.9263 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 1.7106 \\ 1.9263 \end{bmatrix}.$$

Matlab/Octavea varten määrittelemme ensin funktion f:
```
f=@(x)[x(1)^2-x(2)-1;x(2)^2-x(1)-2]
```
sitten derivaatan
```
fp=@(x)[2*x(1),-1;-1, 2*x(2)]
```
ja alkuarvon
```
x=[1;1]
```
jonka jälkeen voimme toistaa komennon
```
x=x-fp(x)\f(x)
```
riittävän monta kertaa.

---

5. Yhtälösysteemi

$$y^4z^2 - uy - vz^3 = -1,$$
$$z + u^2 - 2y - v = -1,$$

määrittää y:n ja z:n muuttujien u ja v funktioina siten että $y(1,1) = 1$ ja $z(1,1) = 1$. Laske $z_v(1,1)$.

Ratkaisu: Derivoimalla molemmat yhtälöt muuttujan v suhteen saamme

$$\begin{aligned} &4y(u,v)^3z(u,v)^2y_v(u,v) + 2y(u,v)^4z(u,v)z_v(u,v) \\ &\qquad - uy_v(u,v) - z(u,v)^3 - 3vz(u,v)^2z_v(u,v) = 0, \\ &z_v(u,v) - 2y_v(u,v) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Koska $y(1,1) = 1$ ja $z(1,1) = 1$ niin saamme sijoittamalla $u = v = 1$ yhtälösysteemin

$$3y_v(1,1) - z_v(1,1) = 1,$$
$$-2y_v(1,1) + z_v(1,1) = 1.$$

Laskemalla yhteen saamme $y_v(1,1) = 2$ ja sijoittamalla tämän tuloksen toiseen yhtälöön saamme $z_v(1,1) = 5$.

---

6. Kahden muuttujan funktiosta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiedetään, että se on derivoituva kaikissa pisteissä, derivaatan ainoat nollakohdat ovat $(3,2)$ ja $(1,3)$ ja funktion arvoista on laskettu seuraavat:

$$f(0,0) = 0, \qquad f(4,0) = 6, \qquad f(4,4) = 5,$$
$$f(2,0) = 9, \qquad f(3,2) = 7, \qquad f(1,3) = 11.$$

Mitä voit tämän tiedon perusteella sanoa funktion suurimmasta arvosta joukossa $\Omega = \{\, (x,y) : 0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le x \,\}$? Mitä sinun pitäisi tehdä jotta voisit määrittää funktion pienimmän arvon joukossa Ω?

Ratkaisu: Piste $(1,3)$ ei ole joukossa Ω mutta kaikki muut pisteet, joissa funktion arvo on laskettu, kuuluvat joukkoon Ω. Näin ollen voimme vetää johtopäätöksen, että funktion suurin arvo on vähintään 9.

Funktion pienimmän arvon määrittämiseksi meidän pitää laskea funktion arvo niissä reunan $\partial\Omega$ pisteissä missä pienin arvo mahdollisesti saavutetaan, eli tässä tapauksessa funktioiden $f(x,0)$, $0 < x < 4$, $f(4,y)$, $0 < y < 4$ ja $f(x,x)$, $0 < x < 4$ derivaattojen nollakohdat.

---

7. Määritä funktion $x + 2y$ suurin arvo kun $x^2 + 2y^2 = 9$ käyttämällä Lagrangen kerrointa.

Ratkaisu: Olkoon

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 9).$$

Ehdosta $L' = 0$ saamme yhtälösysteemin

$$\begin{aligned} 1 + 2x\lambda &= 0 \\ 2 + 4y\lambda &= 0 \\ x^2 + 2y^2 - 9 &= 0. \end{aligned}$$

Kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä seuraa, että $x\lambda = y\lambda$ ja siten $x = y$ (koska jos $\lambda = 0$ niin $2x\lambda = 0 \neq -1$). Kolmannesta yhtälöstä seuraa silloin, että $3x^2 = 9$ eli $x = y = \pm\sqrt{3}$. Jos $x = y = \sqrt{3}$ niin $x + 2y = 3\sqrt{3}$ ja jos $x = y = -\sqrt{3}$ niin $x + 2y = -3\sqrt{3}$.

Funktiot $f(x,y) = x + 2y$ ja $g(x,y) = (x^2 + 2y^2 - 9$ ovat jatkuvasti derivoituvia ja jälkimmäisen funktion derivaatta $\begin{bmatrix} 2x & 4y \end{bmatrix}$ on nolla ainostaan origossa, joka ei ole käyrällä $g(x,y) = 0$. Lisäksi joukko $\{\, (x,y) : x^2{+}2y^2 = 9 \,\}$ on suljettu ja rajoitettu joten jatkuva funktio f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa Lagrangen funktion derivaatan nollakohdassa. Suurin arvo on siis $3\sqrt{3}$ ja se saavutetaan pisteessä $x = y = \sqrt{3}$.

---

8. Laske integraali $\iint_\Omega 3y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ kun $\Omega = \{\, (x,y) : x^2 + y^2 \le 9,\ 0 \le y \le -x \,\}$ käyttämällä napakoordinaatteja.

Ratkaisu: Kun käytämme napakoordinaatteja, eli

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta), \\ y &= r\sin(\theta), \end{aligned}$$

niin $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$. Koska $x^2 + y^2 \leq 9$ kun $0 \leq r \leq 3$, $y \geq 0$ kun $0 \leq \theta \leq \pi$ ja $y \leq -x$ kun $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$ niin näemme, että $(x, y) \in \Omega$ jos ja vain jos $0 \leq r \leq 3$ ja $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \pi$. Näin ollen

$$\iint_\Omega 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(\int_0^3 3r\sin(\theta) r\,\mathrm{d}r \right)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(\Big/_0^3 r^3 \sin(\theta) \right)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} 27\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Big/_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (-27\cos(\theta)) = -27\cos(\pi) + 27\cos(\tfrac{3}{4}\pi) = 27 - \frac{27}{\sqrt{2}}.$$
