Aalto-yliopisto

MS-A0207 Differentiaali- ja integraalilaskenta 2 (Chem) Gripenberg, Nieminen, Ojanen, Tiilikainen, Weckman
Harjoitus 4
25.1–29.1.2016, viikko 4

Palauta P-tehtävät ja vastaa S-tehtäviin viimeistään 1.2.2016 klo. 15:00.
**Muista kirjoittaa nimesi, opiskelijanumerosi ja harjoitusryhmäsi!**

**P1.** Määritä funktion $f(x,y) = 6xy^2 - 2x^3 - 3y^4$ kriittiset pisteet (derivaatan eli gradientin nollakohdat) ja päättele mitkä niistä ovat paikallisia ääriarvopisteitä.
*Vihje: Muista, että $2 \times 2$-matriisin ominaisarvoilla on sama merkki jos determinantti on positiivinen ja tämä merkki on sama kuin lävistäjäalkioden merkki. Jos jossain kriittisesessä pisteessä $(x_0, y_0)$ toisen derivaatan determinantti on $0$ niin kannattaa tutkia joko funktion $x \mapsto f(x, y_0)$ tai funktion $y \mapsto f(x_0, y)$ käyttäytymistä.*

**P2.** Köyden päät ovat pisteissä $(0,0)$ ja $(a,b)$ ja köyden keskipisteeseen on kiinnitetty kappale, jonka massa on paljon suurempi kuin köyden (jolloin köysi pysyy kireänä). Jos köyden pituus on $2L$ ja kappaleen koordinaatit ovat $(x,y)$ niin pätee

$$x^2 + y^2 = L^2,$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = L^2.$$

Jos nyt $L = 5$, $a = 7$ ja $b = -1$ niin $x = 3$ ja $y = -4$. (On tietenkin olemassa toinenkin ratkaisu, mutta tässä oletetaan, että painovoima vaikuttaa negatiivisen $y$-akselin suuntaan.) Arvioi linearisella approksimoinnilla mihin pisteeseen kappale siirtyy jos köyden toinen pää siirretään pisteestä $(7,-1)$ pisteeseen $(6.9, -0.8)$.

*Vihje: Kirjoita* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ *ja*

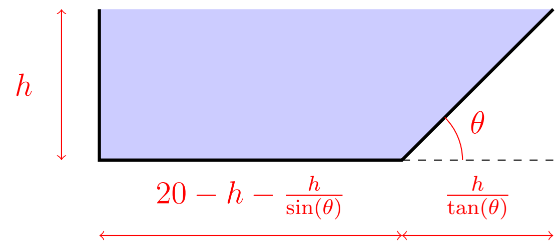
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - L^2 \\ (a-x)^2 + (b-y)^2 - L^2 \end{bmatrix},$$

*jolloin* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$. *Jos nyt* $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$ *ja* $\Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ *niin tehtävänä on määrittää* $\Delta\mathbf{x}$ *siten, että* $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.
Huom! *Tässä tapauksessa ei ole kovin vaikeaa määrittää $x$ ja $y$ muuttujien $a$ ja $b$ funktioina, mutta tässä tehtävässä ei siis ole siitä kysymys.*

*Vastaus:* $(3.03, -3.98)$

**P3.** Tehtävänä on suunnitella kouru, joka valmistetaan peltilevystä, jonka leveys on $20$ cm siten, että kaistale, jonka leveys on $h$ cm taivutetaan $90°$ ja toisella puolella kaistale, jonka leveys on $h/\sin(\theta)$ cm taivutetaan kulman $\theta$ verran (missä $0° \le \theta \le 90°$).

(a) Määritä kourun "poikkipinta-alan" lauseke $f(h,\theta)$.
(b) Määritä joukko $\Omega$ johon $(h,\theta)$ kuuluu (eli ota huomioon, että $h$:n pitää olla ei-negatiivinen, peltilevyn leveys on $20$ cm jne.).
(c) Määritä derivaatan (gradientin) $f'(h,\theta)$ nollakohdat joukossa $\Omega \setminus \partial\Omega$.




*Vastaus:* $\left(\frac{20}{2+\sqrt{3}}, \frac{\pi}{3}\right)$.

**P4.** Olkoot $f(h,\theta)$ ja $\Omega$ kuten tehtävässä P3. Määritä $\max_{(h,\theta)\in\Omega} f(h,\theta)$.

*Vihje: Tässä tehtävässä sinun pitää ensin määrittää ne pisteet reunalla $\partial\Omega$ (eli joukko, joka saadaan kun jokin $\Omega$:n määritelmän epäyhtälöistä on korvattu yhtälöllä) joissa suurin arvo mahdollisesti saavutetaan ja sitten ottaa huomioon tehtävässä P3 saatu tulos. Huomaa, että kun $(h,\theta) \in \partial\Omega$ niin "poikkipinta" on joko suorakulmio tai suorakulmainen kolmio.*

*Vastaus:* $\frac{200}{2+\sqrt{3}}$

**P5.** Muodosta funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2-y}\sin(x-y^2)$ 2. asteen Taylorin polynomi pisteessä $(0,0)$ käyttämällä hyväksi eksponentti- ja sinifunktion Taylorin kehitelmiä $\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \ldots$ ja $\sin(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \ldots$ jolloin sinun ei siis tarvitse laskea osittaisderivaattoja.