Tilastollinen päättely

5. Väliestimointi

5.1. Johdanto

Estimointi, Joukkoestimointi, Kriittinen alue, Luottamusjoukko, Luottamustaso, Luottamusväli, Otos, Parametri, Peittotodennäköisyys, Piste-estimointi, Väliestimaatti, Väliestimaattori, Väliestimointi

5.2. Luottamusvälien konstruointi

1. lajin virhe, Estimointi, Hylkäysalue, Hylkäysvirhe, Hypoteesi, Hyväksymisalue, Joukkoestimointi, Kertymäfunktion saranointi, Kriittinen alue, Luottamusjoukko, Luottamustaso, Luottamusväli, Nollahypoteesi, Otos, Parametri, Peittotodennäköisyys, Piste-estimointi, Saranasuure, Saranointi, Testi, Testin taso, Testisuure, Vaihtoehtoinen hypoteesi, Väliestimaatti, Väliestimaattori, Väliestimointi

5.3. Luottamusvälien vertailu

1. lajin virhe, Estimointi, Harhattomuus, Hylkäysalue, Hylkäysvirhe, Hypoteesi, Hyväksymisalue, Joukkoestimointi, Kertymäfunktion saranointi, Kriittinen alue, Luottamusjoukko, Luottamustaso, Luottamusväli, Luottamusvälin pituus, Nollahypoteesi, Optimaalisuus, Otos, Parametri, Peitto-todennäköisyys, Piste-estimointi, Saranasuure, Saranointi, Tarkkuus, Testi, Testin taso, Testisuure, Vaihtoehtoinen hypoteesi, Väliestimaatti, Väliestimaattori, Väliestimointi

5.1. Johdanto

Luottamusvälit

Olkoon

$$f(x;\theta)$$

satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio*, joka riippuu *tuntemattomasta parametrista* θ.

Olkoon

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

satunnaisotos satunnaismuuttujan X jakaumasta. Tällöin havainnot $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ovat *riippumattomia*, *identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia*, joilla on *sama pistetodennäköisyys*- tai *tiheysfunktio* $f(x;\theta)$:

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \perp$$
$$X_i \sim f(x;\theta),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Olkoon

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ muodostama n-vektori.

Olkoot satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *havaitut arvot*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Merkitään tätä:

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n$$

Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ havaitut arvot $x_1, x_2, \ldots, x_n$ määräävät *havaintopisteen*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Väliestimointi

Luvussa 3 tarkasteltiin todennäköisyysjakauman parametrin θ *piste-estimointia*. Tällöin päättelyn kohteena oli *yksi* parametrin θ arvo. Tässä luvussa tarkastellaan parametrin θ *joukkoestimointia*. Joukkoestimoinnissa päättelyn kohteena ovat muotoa

$$"\theta \in C"$$

olevat *väitteet*, joissa C on jokin parametriavaruuden Θ osajoukko:

$$C \subset \Theta$$

Joukko

$$C = C(\mathbf{x})$$

määrätään havaintopisteen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avulla. Jos θ on reaaliarvoinen parametri, joukko C on tavallisesti jokin reaaliakselin *väli*, jolloin puhumme *väliestimoinnista*.

Olkoon

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

havaintopiste. Funktiot $L(\mathbf{x})$ ja $U(\mathbf{x})$ muodostavat reaaliarvoisen parametrin θ **väliestimaatin**

$$[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$$

jos

$$L(\mathbf{x}) \le U(\mathbf{x})$$

kaikille havaintopisteille **x**. Jos olemme havainneet havaintopisteen **X** = **x**, niin voimme tehdä väliestimaatin $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ perusteella parametrin θ arvosta johtopäätöksen

$$L(\mathbf{x}) \le \theta \le U(\mathbf{x})$$

Satunnaista väliä

$$[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

kutsutaan parametrin θ **väliestimaattoriksi**.

Huomaa, että satunnaismuuttujien $L(\mathbf{X})$ ja $U(\mathbf{X})$ muodostama pari $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ viittaa parametrin θ väliestimaattoriin, kun taas merkintä $[L(\mathbf{x}), U(\mathbf{x})]$ viittaa väliestimaattorin $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ *havaittuun* tai *realisoituneeseen* arvoon.

Tavallisesti $L(\mathbf{x})$ ja $U(\mathbf{x})$ ovat *äärellisiä*, mutta joko $L(\mathbf{x})$ tai $U(\mathbf{x})$ voi olla myös *ääretön*. Jos

$$L(\mathbf{x}) = -\infty$$

niin väliestimaattiin liittyvä väite on muotoa

$$"\theta \le U(\mathbf{x})"$$

Jos taas

$$U(\mathbf{x}) = +\infty$$

niin väliestimaattiin liittyvä väite on muotoa

$$"L(\mathbf{x}) \le \theta"$$

Tällöin puhumme *yksipuolisista* väliestimaateista.

Edellä väliestimaatti määriteltiin *suljettuna* välinä

$$[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

mutta väliestimaatti saattaa olla myös *avoin* väli

$$(L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X}))$$

tai *puoliavoin* väli

$$[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X}))$$

tai *puoliavoin* väli

$$(L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

Luottamustaso ja luottamusväli

Olkoon

$$[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

parametrin θ *väliestimaattori*. Tällöin

$$\Pr_\theta(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) = \Pr(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})] \,|\, \theta)$$

on todennäköisyys, että väli $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ *peittää* parametrin θ todellisen arvon. Kutsumme tätä todennäköisyyttä **peittotodennäköisyydeksi**. Luottamusväliin $[L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$ liittyvä **luottamustaso** $1-\alpha$ on peittotodennäköisyyden infimum parametrin θ suhteen:

$$\inf_\theta \Pr_\theta(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]) = 1-\alpha$$

Luottamustaso ilmoitetaan usein *prosentteina*, jolloin puhumme $100\times(1-\alpha)$ %:n **luottamusvälistä** parametrille θ.

Koska parametrin θ todellinen arvo on tuntematon, myös peittotodennäköisyys

$$\Pr_\theta(\theta \in [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})])$$

on tuntematon ja *voimme taata vain sen, että peittotodennäköisyys ei ylitä luottamustasoa*. Tosin monissa tilanteissa peittotodennäköisyys *ei riipu* parametrista θ, jolloin peittotodennäköisyys yhtyy luottamustasoon.

5.2. Luottamusvälien konstruointi

Seuraavassa esitetään kolme luottamusvälien konstruointimenetelmää:

– *testisuureen kääntäminen*,

– *saranasuureen käyttö*,

– *kertymäfunktion saranointi*.

Kaikki kolme menetelmää perustavat olennaisesti *testisuureen kääntämiseen*.

Testisuureen kääntäminen

Luottamusjoukkojen ja *testien* välillä on seuraava yhteys:

Lause:

Olkoon $A(\theta_0)$ sellaisen *tasoa α olevan testin hyväksymisalue*, jonka *nollahypoteesi* on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

jossa θ_0 on mielivaltainen parametriavaruuden Θ alkio. Olkoon $\mathbf{x}$ havaintopiste ja määritellään joukko

$$C(\mathbf{x}) = \{\theta_0 \,|\, \mathbf{x} \in A(\theta_0)\}$$

Tällöin *satunnaisjoukko* $C(\mathbf{X})$ on *parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla* $1-\alpha$.

Kääntäen, olkoon $C(\mathbf{X})$ on *parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla* $1-\alpha$. Tällöin joukko

$$A(\theta_0) = \{\mathbf{x} \mid \theta_0 \in C(\mathbf{x})\}$$

on sellaisen *tasoa α* olevan testin *hyväksymisalue*, jonka nollahypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

Todistus:

Olkoon testauksen kohteena oleva *nollahypoteesi* muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

(i) Todistetaan lauseen *ensimmäinen* osa:

Koska $A(\theta_0)$ on *tasoa α olevan testin hyväksymisalue*, niin

$$\Pr_{\theta_0}(\mathbf{X} \notin A(\theta_0)) \leq \alpha$$

ja siten

$$\Pr_{\theta_0}(\mathbf{X} \in A(\theta_0)) \geq 1-\alpha$$

Koska θ_0 on mielivaltainen parametriavaruuden Θ alkio, voimme korvata θ_0:n merkinnällä θ. Siten joukon $C(\mathbf{X})$ *peittotodennäköisyys* toteuttaa epäyhtälön

$$\Pr_{\theta}(\theta \in C(\mathbf{X})) = \Pr_{\theta}(\mathbf{X} \in A(\theta)) \geq 1-\alpha$$

joten $C(\mathbf{X})$ on *parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla* $1-\alpha$.

(ii) Todistetaan lauseen *toinen* osa:

1. *lajin virheen* eli *hylkäysvirheen* todennäköisyys testille, jonka hyväksymisalue on

$$A(\theta_0) = \{\mathbf{x} \mid \theta_0 \in C(\mathbf{x})\}$$

toteuttaa epäyhtälön

$$\Pr_{\theta_0}(\mathbf{X} \notin A(\theta_0)) = \Pr_{\theta_0}(\theta_0 \notin C(\mathbf{X})) \leq \alpha$$

joten testin *taso* on α.

■

Saranasuure

Satunnaismuuttuja

$$Q(\mathbf{X};\theta) = Q(X_1, X_2, \ldots, X_n;\theta)$$

sanotaan **saranasuureeksi**, jos sen jakauma *ei riipu* mistään parametreista. Tällä tarkoitetaan sitä, että jos

$$\mathbf{X} \sim F(\mathbf{x};\theta)$$

niin satunnaismuuttujalla $Q(\mathbf{X};\theta)$ on *sama jakauma kaikille θ*.

Funktio $Q(\mathbf{X};\theta)$ riippuu tavallisesti sekä parametrista θ että otoksesta $\mathbf{X}$ jonkin otostunnusluvun kautta. Sen sijaan todennäköisyys

$$\Pr_\theta\{Q(\mathbf{X};\theta)\in A\}$$

ei saa riippua parametrista θ olipa A mikä tahansa (mitallinen) joukko. Jos haluamme konstruoida parametrille θ luottamusjoukon saranasuureen avulla, meidän on löydettävä *sarana* $Q(\mathbf{x};\theta)$ ja konstruoitava sellainen joukko A, että parametriavaruuden Θ osajoukko

$$\{\theta \mid Q(\mathbf{x};\theta)\in A\}$$

kelpaa parametrin θ joukkoestimaatiksi.

Kertymäfunktion saranointi

Edellisessä kappaleessa nähtiin, että *saranasuureen Q* löytäminen johtaa muotoa

$$C(\mathbf{x}) = \{\theta_0 \mid a \le Q(\mathbf{x},\theta_0) \le b\}$$

olevaan *luottamusjoukkoon*. Jos funktio $Q(\mathbf{x};\theta)$ on jokaiselle havaintopisteelle $\mathbf{x}$ parametrin θ *monotoninen* funktio, niin luottamusjoukko $C(\mathbf{x})$ on aina *väli*. Esimerkiksi *paikka*- ja *skaala-muunnokset* johtavat monotonisiin saranasuureisiin ja siten luottamusväleihin.

Lause: Jatkuvan kertymäfunktion saranointi

Olkoon T tunnusluku, jolla on *jatkuva* kertymäfunktio $F_T(t;\theta)$. Olkoot α_1 ja α_2 kiinteitä reaalilukuja ja olkoon $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, jossa $0 < \alpha < 1$. Määritellään funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ seuraavalla tavalla:

(i) Jos $F_T(t;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *vähenevä* funktio, niin valitaan funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ niin, että

$$F_T(t;\theta_U(t)) = \alpha_1$$

ja

$$F_T(t;\theta_L(t)) = 1-\alpha_2$$

(ii) Jos $F_T(t;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *kasvava* funktio, niin valitaan funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ niin, että

$$F_T(t;\theta_U(t)) = 1-\alpha_2$$

ja

$$F_T(t;\theta_L(t)) = \alpha_1$$

Tällöin satunnaisväli

$$[\theta_L(T),\theta_U(T)]$$

on *parametrin θ luottamusväli luottamustasolla* $1-\alpha$.

Todistus:

(i) Oletetaan, että olemme konstruoineet tasoa $1-\alpha$ olevan *hyväksymisalueen*

$$\{t \mid \alpha_1 \le F_T(t;\theta_0) \le 1-\alpha_2\}$$

Koska $F_T(t;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *vähenevä* funktio ja

$$1 - \alpha_2 > \alpha_1$$

niin siten

$$\theta_L(t) < \theta_U(t)$$

ja $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ ovat *yksikäsitteisiä*.

Koska lisäksi

$$F_T(t;\theta) < \alpha_1 \quad \Leftrightarrow \quad \theta > \theta_U(t)$$
$$F_T(t;\theta) > 1 - \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta < \theta_L(t)$$

niin

$$\{\theta \mid \alpha_1 \le F_T(t;\theta_0) \le 1 - \alpha_2\} = \{\theta \mid \theta_L(T) \le \theta \le \theta_U(T)\}$$

(ii) Kohta (ii) todistetaan vastaavalla tavalla kuin kohta (i).

■

Tavallisesti valitaan

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$$

jolloin luottamusväliä sanotaan *symmetriseksi*. Tämä valinta *ei* kuitenkaan *ole välttämättä optimaaline*n; ks. kohtaa 5.3.

Jos haluamme *yksipuolisen* luottamusvälin, valitsemme tilanteesta riippuen joko

$$\alpha_1 = 0$$

tai

$$\alpha_2 = 0$$

Lause: Diskreetin kertymäfunktion saranointi

Olkoon T *diskreetti* tunnusluku, jonka kertymäfunktio on $F_T(t;\theta)$. Olkoot α_1 ja α_2 kiinteitä reaalilukuja ja olkoon $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, jossa $0 < \alpha < 1$. Määritellään funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ seuraavalla tavalla:

(i) Jos $F_T(t;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *vähenevä* funktio, niin valitaan funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ niin, että

$$\Pr(T \le t \mid \theta_U(t)) = \alpha_1$$

ja

$$\Pr(T \ge t \mid \theta_L(t)) = \alpha_2$$

(ii) Jos $F_T(t;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *kasvava* funktio, niin valitaan funktiot $\theta_L(t)$ ja $\theta_U(t)$ niin, että

$$\Pr(T \ge t \mid \theta_U(t)) = \alpha_1$$

ja

$$\Pr(T \le t \mid \theta_L(t)) = \alpha_2$$

Tällöin satunnaisväli

$$[\theta_L(T), \theta_U(T)]$$

on *parametrin* θ *luottamusväli luottamustasolla* $1-\alpha$.

Todistus:

(i) Todetaan ensin, että satunnaismuuttuja $F_T(T;\theta)$ on *stokastisesti suurempi* kuin *jatkuvaa tasaista jakaumaa* Uniform(0,1) noudattava satunnaismuuttuja X.

Stokastinen suuremmuus:

Olkoon $X \sim F_X$ ja $Y \sim F_Y$. Satunnaismuuttuja X on *stokastisesti suurempi tai yhtä suuri* kuin satunnaismuuttuja Y, jos

$$F_X(t) \le F_Y(t)$$

kaikille t. Tällöin

$$\Pr(X > t) \ge \Pr(Y > t)$$

kaikille t. Jos X on stokastisesti suurempi kuin Y, niin satunnaismuuttujalla X on taipumus saada suurempia arvoja kuin satunnaismuuttujalla Y.

Siten

$$\Pr(F_T(T;\theta) \le x) \le x$$

Sama ominaisuus on funktiolla

$$\bar{F}_T(T;\theta) = \Pr(T \ge t \mid \theta)$$

joten joukko

$$\{\theta \mid F_T(T;\theta) \le \alpha_1 \text{ ja } \bar{F}_T(T;\theta) \le \alpha_2\}$$

on *parametrin* θ *luottamusjoukko luottamustasolla* $1-\alpha$.

Koska $F_T(T;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *vähenevä* funktio, niin $\bar{F}_T(T;\theta)$ on jokaiselle t parametrin θ arvojen *ei-vähenevä* funktio.

Siten

$$\theta > \theta_U(t) \;\Rightarrow\; F_T(t;\theta) < \alpha/2$$
$$\theta < \theta_L(t) \;\Rightarrow\; \bar{F}_T(t;\theta) < \alpha/2$$

ja

$$\{\theta \mid F_T(T;\theta) \le \alpha_1 \text{ ja } \bar{F}_T(T;\theta) \le \alpha_2\} = \{\theta \mid \theta_L(T) \le \theta \le \theta_U(T)\}$$

(ii) Kohta (ii) todistetaan vastaavalla tavalla kuin kohta (i).

■

5.3. Luottamusvälien vertailu

Peittotodennäköisyys ja luottamusjoukon koko

Oletetaan, että luottamusvälin *peittotodennäköisyys* kiinnitetään. Miten valitaan *lyhyin* niistä luottamusväleistä, joilla on sama peittotodennäköisyys?

Lause:

Olkoon tiheysfunktio $f(x)$ *unimodaalinen* ja olkoon x^* funktion $f(x)$ *moodi*. Oletetaan, että väli $[a, b]$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) $\int_a^b f(x)dx = 1-\alpha$

(ii) $f(a) = f(b) > 0$

(iii) $a \le x^* \le b$

Tällöin väli $[a, b]$ on *lyhyin* niistä väleistä, jotka toteuttavat ehdon (i).

Todistus:

Olkoon $[a', b']$ reaaliakselin suljettu väli, joka toteuttaa ehdon

$$b' - a' < b - a$$

Näytämme, että

$$\int_{a'}^{b'} f(x)dx = 1-\alpha$$

Tarkastelemme vain tapausta $a' \le a$. Tapaus $a' > a$ todistetaan vastaavalla tavalla.

Jaetaan todistus kahteen osaan sen mukaan onko $b' \le a$ vai $b' > a$.

Olkoon $b' \le a$. Tällöin

$$a' \le b' \le a \le x^*$$

ja siten

$$\begin{aligned}
\int_{a'}^{b'} f(x)dx &\le f(b')(b'-a') && \mid x \le b' \le x^* \Rightarrow f(x) \le f(b') \\
&\le f(a)(b'-a') && \mid b' \le a \le x^* \Rightarrow f(b') \le f(a) \\
&< \int_a^b f(x)dx && \mid b'-a' < b-a \text{ ja } f(a) > 0 \\
&= 1-\alpha && \mid \text{(ii),(iii) ja unimodaalisuus } \Rightarrow \\
& && \quad f(x) \ge f(a), \text{ kun } a \le x \le b
\end{aligned}$$

joten tapaus $b' \le a$ on todistettu.

Olkoon $b' > a$. Tällöin

$$a' \le a < b' < b$$

sillä, jos

$$b' \ge b$$

niin tällöin

$$b' - a' \geq b - a$$

mikä on vastoin oletusta.

Siten

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \left[\int_{a'}^{a} f(x)dx - \int_{b'}^{b} f(x)dx\right] \\ &= (1-\alpha) + \left[\int_{a'}^{a} f(x)dx - \int_{b'}^{b} f(x)dx\right]\end{aligned}$$

ja siten väite on todistettu, jos hakasulkulauseke $[\cdot]$ on *negatiivinen*.

Koska funktio $f(x)$ on unimodaalinen ja

$$a' \leq a < b' < b$$

niin kohdasta (ii) seuraa, että

$$\int_{a'}^{a} f(x)dx \leq f(a)(a - a')$$

ja

$$\int_{b'}^{b} f(x)dx \geq f(b)(b - b')$$

Siten

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{a} f(x)dx - \int_{b'}^{b} f(x)dx &\leq f(a)(a-a') - f(b)(b-b') \\ &= f(a)[(a-a') - (b-b')] \qquad | \, f(a) = f(b) \\ &= f(a)[(b'-a') - (b-a)]\end{aligned}$$

mikä on negatiivinen, jos

$$b' - a' < b - a$$

ja

$$f(a) > 0$$

Siten myös tapaus $b' \leq a$ on todistettu.

■

Luottamusvälien optimaalisuus ja testit

Koska *luottamusvälien* ja *testien välillä on kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus* (ks. kappale 5.2), on luontevaa, että luottamusvälin optimaalisuuden käsite määritellään sellaisella tavalla, että se heijastelee jollakin tavalla vastaavan testin optimaalisuutta.

Luottamusvälin optimaalisuutta ei kuitenkaan kannata liittää suoraan *testin kokoon*, vaan *todennäköisyyteen sille*, *että väärä parametrin arvo tulee peitetyksi*. Todennäköisyys sille, että *väärä parametrin arvo tulee peitetyksi* mittaa epäsuorasti *luottamusjoukon kokoa*. Koska ”pieni” luottamusjoukko peittää pienemmän osan parametrin mahdollisista arvoista kuin ”suuri” luottamusjoukko, niin todennäköisyys sille, että luottamusjoukko peittää *vääriä* parametrin arvoja pitäisi olla ”pienelle” joukolle pienemmän kuin ”suurelle” joukolle.

Alla esitetään yhtälö, joka liittää toisiinsa luottamusjoukon koon ja todennäköisyyden peittää väärä parametrin arvo.

Tarkastellaan yleistä tilannetta, jossa otoksen

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

yhteisjakauman pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio on $f(\mathbf{x};\theta)$. Olkoon $A(\theta)$ sellaisen *tasoa α olevan testin hyväksymisalue*, jonka nollahypoteesi on muotoa

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

Konstruoidaan parametrille θ *luottamusjoukko $C(\mathbf{X})$ luottamustasolla* $1-\alpha$ *kääntämällä hyväksymisalue $A(\theta)$.*

Luottamusjoukkoon $C(\mathbf{X})$ liittyvä todennäköisyys sille, että *oikea parametrin arvo tulee peitetyksi* eli *peittotodennäköisyys*

$$\Pr_\theta(\theta \in C(\mathbf{X}))$$

on parametrin θ funktio.

Todennäköisyys sille, että *väärä parametrin arvo tulee peitetyksi*, on parametrin arvojen θ ja θ' funktio, jonka määrittelee todennäköisyys peittää parametrin arvo θ', kun *oikea* parametrin arvo on θ. Tämän todennäköisyyden antaa kaavat

$$\Pr_\theta(\theta' \in C(\mathbf{X}))\,,\ \theta \neq \theta'\,,\ \text{jos } C(\mathbf{X}) = [L(\mathbf{X}), U(\mathbf{X})]$$

$$\Pr_\theta(\theta' \in C(\mathbf{X}))\,,\ \theta < \theta'\,,\ \text{jos } C(\mathbf{X}) = [L(\mathbf{X}), +\infty]$$

$$\Pr_\theta(\theta' \in C(\mathbf{X}))\,,\ \theta > \theta'\,,\ \text{jos } C(\mathbf{X}) = [-\infty, U(\mathbf{X})]$$

Luottamusjoukkoa, joka *minimoi* todennäköisyyden peittää väärä parametrin θ arvo niiden luottamusjoukkojen luokassa, joiden luottamustaso on $1-\alpha$, kutsutaan **tasaisesti kaikkein tarkimmaksi**.

Lause:

Olkoon

$$\mathbf{X} \sim f(\mathbf{x};\theta)$$

jossa θ on reaaliarvoinen parametri. Tarkastellaan *tasaisesti voimakkainta tasoa α olevaa testiä* nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

vaihtoehtoista hypoteesia

$$\mathrm{H}_1 : \theta > \theta_0 \quad (\mathrm{H}_1 : \theta < \theta_0)$$

vastaan. Olkoon $A^*(\theta_0)$ *testin hyväksymisalue* ja olkoon $C^*(\mathbf{x})$ hyväksymisalue $A^*(\theta_0)$ kääntämällä muodostettu parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla $1-\alpha$. Jos C on jokin toinen parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla $1-\alpha$, niin

$$\Pr_\theta(\theta' \in C^*(\mathbf{X})) \leq \Pr_\theta(\theta' \in C(\mathbf{X}))$$

kaikille $\theta' < \theta$ ($\theta' > \theta$).

Todistus:

Olkoon $\theta' < \theta$. Olkoon C parametrin θ luottamusjoukko luottamustasolla $1-\alpha$. Tarkastellaan tasoa α olevaa testiä nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta'$$

joka on muodostettu kääntämällä C ja olkoon $A(\theta')$ testin hyväksymisalue.

Koska $A^*(\theta')$ on hyväksymisalue tasaisesti voimakkaimmalle testille nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta'$$

vaihtoehtoista hypoteesia

$$\mathrm{H}_1 : \theta > \theta'$$

vastaan ja koska $\theta > \theta'$, niin

$$\begin{aligned}
\Pr_\theta(\theta' \in C^*(\mathbf{X})) &= \Pr_\theta(\mathbf{X} \in A^*(\theta')) && \mid \text{Käännetään luottamusjoukko } C^* \text{ hyväksymisalueeksi } A^* \\
&\le \Pr_\theta(\mathbf{X} \in A(\theta')) && \mid A^* \text{ on tasaisesti voimakkaimman testin hyväksymisalue} \\
&= \Pr_\theta(\theta' \in C(\mathbf{X})) && \mid \text{Käännetään hyväksymisalue } A \text{ luottamusjoukoksi } C
\end{aligned}$$

Koska molemmat hyväksymisalueen todennäköisyydet tässä epäyhtälöketjussa ovat

1 – testin voimakkuus

niin näemme, että tasaisesti voimakkain testi minimoi hyväksymisalueen todennäköisyyden.

Siten olemme näyttäneet, että tapauksessa $\theta' < \theta$ *todennäköisyys sille, että väärä parametrin arvo tulee peitetyksi minimoituu*, *jos luottamusjoukko konstruoidaan kääntämällä tasaisesti voimakkain testi* nollahypoteesille

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta'$$

vaihtoehtoista hypoteesia

$$\mathrm{H}_1 : \theta > \theta'$$

vastaan.

Tapaus $\theta' > \theta$ todistetaan vastaavalla tavalla.

■

Harhattomuus on eräs keskeisistä vaatimuksista *testeille* (ks. lukua 4). Koska testien ja luottamusjoukkojen välillä on edellä esitetty vastaavuus, harhattomuuden käsite on syytä pyrkiä liittämään myös luottamusjoukkoihin.

Kutsumme luottamusjoukkoa $C(\mathbf{x})$ luottamustasolla **(1–α)-harhattomaksi**, jos

$$\Pr_\theta(\theta' \in C^*(\mathbf{X})) \le 1-\alpha$$

kaikille $\theta' \neq \theta$.

Jos luottamusjoukko on *harhaton*, todennäköisyys, että *väärä* parametrin arvo tulee peitetyksi on *korkeintaan yhtä suuri* kuin pienin mahdollinen todennäköisyys sille, että *oikea* parametrin arvo tulee peitetyksi.

Harhaton luottamusjoukko voidaan konstruoida *kääntämällä harhaton testi*. Olkoon siis $A(\theta_0)$ harhattoman tasoa α olevan testin *hyväksymisalue*, kun testattavana on nollahypoteesi

$$\mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0$$

vaihtoehtoista hypoteesia

$$\mathrm{H}_1 : \theta \neq \theta_0$$

vastaan. Konstruoidaan parametrille θ *luottamusjoukko* $C(\mathbf{x})$ luottamustasolla $1-\alpha$ *kääntämällä hyväksymisalue* $A(\theta_0)$. Tällöin luottamusjoukko $C(\mathbf{x})$ on *harhaton*.

Prattin teoreema:

Olkoon reaaliarvoisen satunnaismuuttujan X pistetodennäköisyys- tai tiheysfunktio $f(x;\theta)$, jossa θ on reaaliarvoinen parametri. Olkoon

$$C(x) = [L(x), U(x)]$$

parametrin θ luottamusväli luottamustasolla $1-\alpha$. Jos $L(x)$ ja $U(x)$ ovat molemmat muuttujan x *kasvavia* (*väheneviä*) funktioita, niin

$$\mathrm{E}_{\theta^*}(U(X) - L(X)) = \int\limits_{\theta \neq \theta^*} \mathrm{Pr}_{\theta^*}(\theta \in C(X))d\theta$$

kaikille θ^*.

Todistus:

Todistamme Prattin teoreeman vain siinä tapauksessa, että luottamusvälin $C(x)$ päätepisteet $L(x)$ ja $U(x)$ ovat molemmat muuttujan x *kasvavia* funktioita.

Odotusarvon määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_{\theta^*}(U(X) - L(X)) \\
&= \int\limits_{\chi} (U(x) - L(x)) f(x;\theta^*)dx && |\,\text{Odotusarvon määritelmä} \\
&= \int\limits_{\chi} \left[\int\limits_{L(x)}^{U(x)} d\theta \right] f(x;\theta^*)dx && |\,\theta \text{ on dummy-muuttuja} \\
&= \int\limits_{\Theta} \left[\int\limits_{U^{-1}(\theta)}^{L^{-1}(\theta)} f(x;\theta^*)dx \right] d\theta && |\,\text{Integroimisjärjetyksen vaihto} \\
&= \int\limits_{\Theta} \left[\mathrm{Pr}_{\theta*}(U^{-1}(\theta) \leq X \leq L^{-1}(\theta)) \right] d\theta && |\,\text{Määritelmä} \\
&= \int\limits_{\Theta} \left[\mathrm{Pr}_{\theta*}(\theta \in C(X)) \right] d\theta && |\,\text{Käännetään hyväksymisalue} \\
&= \int\limits_{\theta \neq \theta^*} \mathrm{Pr}_{\theta^*}(\theta \in C(X))d\theta && |\,\text{Yhden pisteen tn} = 0
\end{aligned}$$

jossa χ on kaikkien mahdollisten pisteiden x joukko.

Integroimisjärjestyksen vaihto yo. yhtälöketjussa voidaan perustella *Fubinin lauseen* avulla, mutta voidaan helposti nähdä oikeutetuksi myös suoraan olettaen, että kaikki integroitavat ovat äärellisiä.

Hyväksymisalueen kääntäminen perustuu siihen, että L ja U oletettiin *kasvaviksi*, jolloin

$$\theta \in \{\theta \mid L(x) \le \theta \le U(x)\} \Leftrightarrow x \in \{x \mid U^{-1}(\theta) \le x \le L^{-1}(\theta)\}$$

■

Prattin teoreeman mukaan väliestimaattorin

$$C(X) = [L(X), U(X)]$$

pituuden

$$U(X) - L(X)$$

odotusarvo yhtyy summaan (so. integraaliin) todennäköisyyksistä sille, että *väärä parametrin arvo tulee peitetyksi*.