Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

6. harjoitukset / Tehtävät

Aiheet: **Piste-estimointi**

Avainsanat:

Binomijakauma, Cramérin ja Raon alaraja, Cramérin ja Raon epäyhtälö, Eksponenttiperhe, Estimaattori, Estimaatti, Estimointi, Harha, Harhattomuus, Havainto, Havaintopiste, Logaritminen uskottavuusfunktio, Minimivarianssisuus, Normaalijakauma, Normaalisuus, Otos, Otostunnusluku, Parametri, Paras harhaton estimaattori, Pistetodennäköisyysfunktio, Poisson-jakauma, Raon ja Blackwellin teoreema, Riippumattomuus, Schwarzin epäyhtälö, Tehokkuus, Tiheysfunktio, Tyhjentävyys, Uskottavuusfunktio, Varianssi, Yhteisjakauma

Tehtävä 6.1.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumaton satunnaisotos *Poisson-jakaumasta* Poisson(λ). Todista, että tunnusluku

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on *paras harhaton estimaattori* parametrille λ. Käytä todistuksessa *Cramérin ja Raon epäyhtälöä*.

Tehtävä 6.2.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumaton satunnaisotos *normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, jossa parametri σ^2 on tunnettu. Todista, että tunnusluku

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on *paras harhaton estimaattori* parametrille μ. Käytä todistuksessa *Cramérin ja Raon epäyhtälöä*.

Tehtävä 6.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumaton satunnaisotos *Poisson-jakaumasta* Poisson(λ). Todista, että tunnusluku

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on *paras harhaton estimaattori* parametrille λ. Käytä todistuksessa lausetta, joka antaa välttämättömän ja riittävän ehdon sille, että harhaton estimaattori saavuttaa *Cramérin ja Raon alarajan*.

Tehtävä 6.4.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumaton satunnaisotos *normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$, jossa parametri σ^2 on tunnettu. Todista, että tunnusluku

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

on *paras harhaton estimaattori* parametrille μ. Käytä todistuksessa lausetta, joka antaa välttämättömän ja riittävän ehdon sille, että harhaton estimaattori saavuttaa *Cramérin ja Raon alarajan*.

Tehtävä 6.5.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ riippumaton satunnaisotos *normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$. Näytä, että tunnusluku

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

ei ole paras harhaton estimaattori parametrille σ^2 ja todista, että *parasta harhatonta estimaattoria* parametrille σ^2 *ei ole olemassa*, *ellei odotusarvoparametri* μ *ole tunnettu*.

Tehtävä 6.6.

Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia havaintoja *normaalijakaumasta* $\mathrm{N}(\mu,1)$. Olkoon

$$\bar{X} = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

Tehtävissä 6.2. ja 6.4. osoitettiin, että estimaattori $\bar{X}$ on *paras harhaton estimaattori* parametrille μ.

Tarkastellaan funktiota

$$\phi(X_1) = \mathrm{E}_\mu(\bar{X} \mid X_1)$$

Todista, että

$$\mathrm{Var}_\mu(\phi(X_1)) \le \mathrm{Var}_\mu(\bar{X})$$

Huomaa, että tämä ei ole ristiriidassa *Raon ja Blackwellin teoreeman* kanssa, koska $\phi(X_1)$ *ei ole estimaattori*.

Tehtävä 6.7.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ riippumaton satunnaisotos *binomijakaumasta* Bin(k,p). Tavoitteena on estimoida yhden onnistumisen todennäköisyys

$$\tau(p) = \Pr_p(X = 1) = kp(1-p)^{k-1}$$

Tunnusluku

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathrm{Bin}(kn, p)$$

on *täydellinen* ja *tyhjentävä* parametrille p (ks. tehtäviä 4.1 ja 4.6). Todista ensin, että tunnusluku

$$h(X_1) = \begin{cases} 1 \text{ , jos } X_1 = 1 \\ 0 \text{ , muulloin} \end{cases}$$

on *harhaton estimaattori* parametrille $\tau(p)$. Todista edelleen, että tunnusluku

$$\phi(T) = \mathrm{E}(h(X_1) \,|\, T)$$

on *yksikäsitteinen paras harhaton estimaattori* parametrille $\tau(p)$ ja näytä, että

$$\phi(T) = k \frac{\binom{k(n-1)}{T-1}}{\binom{kn}{T}}$$