

Mat-1.3621 Tilastollinen päättely**4. harjoitukset / Tehtävät****Aiheet: Datan redusoinnin periaatteet****Avainsanat:**

Ansillaarisuus, Basun teoreema, Birnbaumin teoreema, Datan redusointi, Ehdollisuusperiaate, Evidenssi, Faktorointiteoreema, Fidusiaalisuus, Formaali tyhjentävyysperiaate, Formaali uskottavuusperiaate Informaatio, Minimaalinen tyhjentävyys, Otos, Otostunnusluku, Parametri, Riippumattomuus, Sivutunnusluku, Todennäköisyysjakauma, Tyhjentävyys, Tyhjentävyysperiaate, Täydellisyys, Uskottavuus, Uskottavuusfunktio, Uskottavuusperiaate, Yhteisjakauma

Tehtävä 4.1.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *Bernoulli-jakaumasta* Bernoulli(p). Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$$

on *tyhjentävä* parametrille p .

Tehtävä 4.2.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *Poisson-jakaumasta* Poisson(λ). Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$$

on *tyhjentävä* parametrille λ .

Tehtävä 4.3.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *diskreetistä tasaisesta jakaumasta*, joka on määritelty pisteissä $1, 2, \dots, \theta$. Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

on *tyhjentävä* parametrille θ .

Tehtävä 4.4.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *jatkuvasta tasaisesta jakaumasta*, joka on määritelty välillä $(\theta, \theta + 1)$. Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = (\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$$

on *minimaalisesti tyhjentävä* parametrille θ .

Tehtävä 4.5.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *jatkuvasta tasaisesta jakaumasta*, joka on määritelty välillä $(\theta, \theta+1)$ (ks. tehtävää 4.4.). Todista, että tunnusluku

$$R = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

on *ansillaarinen* parametrille θ .

Tehtävä 4.6.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *Bernoulli-jakaumasta* Bernoulli(p). Tarkastellaan tunnuslukua

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$$

Tehtävässä 4.1. todettiin, että tunnusluku $T(\mathbf{X})$ on *tyhjentävä* parametrille p ja lisäksi

$$T(\mathbf{X}) \sim \text{Bin}(n, p)$$

Todista, että tunnusluku $T(\mathbf{X})$ on *täydellinen*.

Tehtävä 4.7.

Olkoon X_1, X_2, \dots, X_n satunnaisotos *eksponenttijakaumasta* Exp(λ).

(a) Todista, että tunnusluku

$$T(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n X_i$$

on *minimaalisesti tyhjentävä* parametrille λ .

(b) Johda soveltamalla *Basun teoreemaa* tunnusluvun

$$S(\mathbf{X}) = \frac{X_n}{\sum_{i=1}^n X_i}$$

odotusarvo.