Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

3. harjoitukset / Tehtävät

Aiheet: **Otosjakaumat**

Avainsanat:

Aritmeettinen keskiarvo, Delta-menetelmä, Järjestystunnusluku, Keskeinen raja-arvolause, Normaalijakauma, Otos, Otosjakauma, Otostunnusluku, Otosvarianssi, Riippumattomuus, Suurten lukujen laki

Tehtävä 3.1.

Oletetaan, että eräiden komponenttien eliniät (mitattuna vuosina) ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat samaa eksponenttijakaumaa parametrinaan λ.

Poimitaan komponenttien joukosta satunnaisotos, jonka koko on n. Määrää todennäköisyys, että jokainen komponenteista kestää kauemmin kuin 2 vuotta.

Tehtävä 3.2.

Olkoot $Y_1, Y_2, \ldots , Y_k$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat binomijakaumia parametrein $(n_1, p), (n_2, p), \ldots , (n_k, p)$. Todista, että satunnaismuuttujien $Y_1, Y_2, \ldots , Y_k$ summa noudattaa binomijakaumaa parametrein $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ ja p.

Tehtävä 3.3.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ satunnaisotos Cauchyn jakaumasta parametrein 0 ja 1. Todista, että havaintojen $X_1, X_2, \ldots , X_n$ aritmeettinen keskiarvo noudattaa Cauchyn jakaumaa parametrein 0 ja 1.

Cauchyn jakauma:

Jatkuva satunnaismuuttuja X noudattaa *Cauchyn jakaumaa* parametrein μ ja σ, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Merkintä:

$$X \sim \text{Cauchy}(\mu, \sigma)$$

Parametri μ on Cauchyn jakauman *mediaani*:

$$\Pr(X \geq \mu) = \Pr(X \leq \mu) = 1/2$$

Parametrit μ ja σ määräävät Cauchyn jakauman *kvartiilit*:

$$\Pr(X \leq \mu - \sigma) = \Pr(X \geq \mu + \sigma) = 1/4$$

Voidaan osoittaa, että Cauchyn jakaumalla *ei ole momentteja*, mistä seuraa, että sillä ei ole *odotusarvoa* eikä *varianssia*. *t-jakauma vapausastein* 1on Cauchyn jakauma parametrein 0 ja 1.

Tehtävä 3.4.

Heität virheetöntä noppaa 60,000 kertaa.

(a) Mikä on odotettavissa oleva kuutosten lukumäärä?

(b) Mikä on todennäköisyys, että kuutosten lukumäärä on suljetulla välillä [9900,10150]?

Tehtävä 3.5.

Radioaktiivisten aineiden säteilyä mitataan Geiger-putkella. Mittaus tapahtuu rekisteröimällä impulssien lukumäärä 60:n sekunnin aikana. Oletetaan, että impulssien lukumäärä sekunnissa noudattaa Poisson-jakaumaa niin, että tapahtumaintensiteettinä on 10 impulssia/s.

(a) Mikä on odotettavissa oleva impulssien lukumäärä 1:n minuutin aikana?

(b) Mikä on keskimääräinen odotusaika ensimmäiselle impulssille?

(c) Mikä on todennäköisyys, että impulsseja tulee 1:ssä minuutissa korkeintaan 550?

Tehtävä 3.6.

Oletetaan, että eräiden komponenttien eliniät ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, jotka noudattavat samaa eksponenttijakaumaa parametrinaan λ. Määrää sellaisen systeemin eliniän jakauma ja keskimääräinen elinikä, jos ko. n komponenttia on kytketty *sarjaan*.

Tehtävä 3.7.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots, X_n$ satunnaisotos Bernoulli-jakaumasta parametrilla p. Määritellään *vedonlyöntisuhde* kaavalla

$$p/(1-p)$$

Olkoon

$$\hat{p}/(1-\hat{p})$$

jossa

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

vedonlyöntisuhteen $p/(1-p)$ (pistoke-) estimaattori. Johda approksimaatio estimaattorin $\hat{p}/(1-\hat{p})$ varianssille Taylorin sarjakehitelmän avulla.

Tehtävä 3.8.

Olkoon $X_1, X_2, \ldots , X_n$ satunnaisotos jakaumasta, jolle $\mathrm{E}(X) = \mu \neq 0$ ja $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Tarkastellaan parametria

$$1/\mu$$

Olkoon

$$1/\bar{X}$$

jossa

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

parametrin $1/\mu$ (pistoke-) estimaattori.

(a) Johda approksimaatio estimaattorin $1/\bar{X}$ varianssille Taylorin sarjakehitelmän avulla.

(b) Johda estimaattorin $1/\bar{X}$ asymptoottinen jakauma.