Mat-1.3621 Tilastollinen päättely

2. harjoitukset / Tehtävät

Aiheet: **Todennäköisyyslaskenta**

Avainsanat:

Momenttiemäfunktio, Moniulotteiset satunnaismuuttujat ja todennäköisyysjakaumat, Odotusarvo, Satunnaismuuttuja, Stokastiikan konvergenssikäsitteet Todennäköisyysjakauma, Tunnusluvut

Tehtävä 2.1.

Olkoot X ja Y satunnaismuuttujia, joiden 1. ja 2. momentit ovat olemassa. Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = X + Y$$

$$V = X - Y$$

Todista seuraavat tulokset:

(a) Aina pätee, että

$$\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y)$$

(b) Jos satunnaismuuttujat X ja Y ovat *samoin jakautuneita*, niin

$$\mathrm{Cov}(U, V) = 0$$

Tehtävä 2.2.

Todista seuraavat korrelaatiokertoimen ominaisuudet:

(i) $-1 \leq \mathrm{Cor}(X,Y) \leq +1$

(ii) Jos X ja Y ovat *riippumattomia*, niin $\mathrm{Cor}(X,Y) = 0$

(iii) $\mathrm{Cor}(X,Y) = \pm 1$, jos ja vain jos

$$Y = \alpha + \beta X,$$

jossa α ja β ovat reaalisia *vakiota*, $\beta \neq 0$

Tehtävä 2.3.

Eräästä kahden muuttujan x ja y havaintoaineistosta estimoitiin sekä muuttujan y regressiosuora muuttujan x suhteen että muuttujan x regressiosuora muuttujan y suhteen pienimmän neliösumman menetelmällä.

Muuttujan y regressiosuoran yhtälöksi muuttujan x suhteen saatiin

$$5y = 6x - 17$$

ja muuttujan x regressiosuoran yhtälöksi muuttujan y suhteen saatiin

$$15x = 8y + 38$$

(a) Määrää muuttujien y ja x havaintoarvojen aritmeettiset keskiarvot.

(b) Määrää ym. regressiomallien selitysasteet.

Huomautus:

Oletamme, että kummassakin regressiomallissa on mukana *vakiotermi*.

Tehtävä 2.4.

Estimoidaan kahden muuttujan x ja y havaintoaineistosta muuttujan y regressiosuora muuttujan x suhteen pienimmän neliösumman menetelmällä.

Todista, että estimoidun regressiosuoran sovitteiden summa on sama kuin selitettävän muuttujan y havaittujen arvojen summa ja residuaalien summa on = 0.

Huomautus:

Oletamme, että regressiomallissa on mukana *vakiotermi*.

Tehtävä 2.5.

(a) Todista, että satunnaismuuttujan X *k. origomomentti*

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

saadaan määräämällä satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktion

$$m_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$$

k. derivaatta pisteessä $t = 0$:

$$\alpha_k = \mathrm{E}(X^k) = \left.\frac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Olkoot

$$X_1, X_2, \ldots , X_n$$

riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden momenttiemäfunktiot ovat

$$m_1(t), m_2(t), \ldots , m_n(t)$$

Tällöin *summan*

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

momenttiemäfunktio on satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \ldots , X_n$ momenttiemäfunktioiden tulo:

$$m_X(t) = m_1(t)m_2(t) \cdots m_n(t)$$

Tehtävä 2.6.

(a) Todista, että kvadraattinen konvergenssi implikoi stokastisen konvergenssin.

(b) Todista heikko suurten lukujen laki.