**Mat-1.3621 Tilastollinen päättely**

**1. harjoitukset / Tehtävät**

**Aiheet:** **Todennäköisyyslaskenta**

**Avainsanat:**

Joukko-oppi, Kertymäfunktio, Kolmogorovin aksioomat, Odotusarvo, $\sigma$-algebra, Satunnaismuuttuja, Tiheysfunktio, Todennäköisyysjakauma, Todennäköisyyslaskennan laskusäännöt, Todennäköisyyslaskenta, Tunnusluvut

## Tehtävä 1.1.

Todista Kolmogorovin aksioomista lähtien, että

(a) $\Pr(\varnothing) = 0$

(b) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

## Tehtävä 1.2.

Olkoot $\Pr(A) = 0.2$ ja $\Pr(B) = 0.6$. Määrää tapahtuman $A \cup B$ todennäköisyys, kun

(a) $\Pr(A \cap B) = 0.1$

(b) $A$ ja $B$ ovat *toisensa poissulkevia*

(c) $A$ ja $B$ ovat *riippumattomia*

(d) $\Pr(A \mid B) = 0.1$

## Tehtävä 1.3.

**Lause 1.**

Olkoon $(S, \mathfrak{F}, \Pr)$ todennäköisyyskenttä ja $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$

Tällöin pätee:

(a) Jos $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \Pr(A_i)$$

(b) Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ , niin

$$\Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \Pr(A_i)$$

**Lause 2.**

Olkoon $(S, \mathfrak{F}, \Pr)$ todennäköisyyskenttä ja $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$

Tällöin pätee:

Jos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \to \varnothing$ , niin

$$\lim_{i\to\infty} \Pr(A_i) = 0$$

**Huomautus**:

Lauseita 1 ja 2 ei voida todistaa äärellisille otosavaruuksille tarkoitetuista todennäköisyyden aksioomista. Lauseiden 1 ja 2 todistaminen vaatii äärettömille otosavaruuksille tarkoitettujen Kolmogorovin aksioomien soveltamista; ks. lukua **Todennäköisyyden aksioomat**.

## Tehtävä 1.4.

Olkoon

$$\xi : S \to \mathbb{R}$$

*satunnaismuuttuja*. Määritellään satunnaismuuttujan $\xi$ *kertymäfunktio* kaavalla

$$F(x) = \Pr(\xi \le x)$$

Todista seuraavat kertymäfunktion ominaisuudet:

(a) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

(b) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

(c) $F$ on ei-vähenevä:

$$x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$$

(d) $F$ on oikealta jatkuva:

$$\lim_{h\to 0+} F(x+h) = F(x)$$

## Tehtävä 1.5.

Olkoon $\xi$ *jatkuva ei-negatiivinen satunnaismuuttuja*, jolla on odotusarvo. Tällöin

$$\mathrm{E}(\xi) = \int_0^\infty \Pr(\xi > x)dx = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

jossa $F(x)$ on satunnaismuuttujan $\xi$ kertymäfunktio.