Teknillinen Korkeakoulu v.Pfaler
Matematiikan laitos

Mat-1.115, Matriisilasku, ma 6.4.1998

Kirjoita selvästi jokaiseen koepaperiin eri riveille:
1) opintojakson nimi, päiväys, mahdollinen välikokeen numero;
2) opiskelijanumero+kirjain, TEKSTATEN sukunimi alleviivattuna, kaikki etunimet;
3) koulutusohjelma (Aut, Tfy, Tik, Tuo, Säh, Kon, Kem, Mak, Puu, Maa, Ryk);
4) mahdolliset entiset nimet ja koulutusohjelmat;
5) nimikirjoitus.

Merkitse paperiisi sähköpostiosoitteesi (selvästi), jos haluat saada tuloksesi sähköpostitse ja hyväksyt, että tuloksesi näkyvät muillekin tenttijöille.

Laske neljä seuraavista tehtävistä

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Laske $\det(3A^T A^2)$.

V $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \det(A) = -2, \det(3A^T A^2) = 3^3 \det(A)^2 \det(A^T) = 3^3 \det(A)^3 = -216$

2. Määrää $\alpha \in \mathbb{C}$, siten, että vektorit

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 3i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

ovat ortogonaaliset.

V

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i & -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \alpha(1-i) - 4 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{4-2i}{1-i} = 3+i$$

Huomaa, että kyseessä on *kompleksinen matriisi*.

3. Olkoon T lineaarikuvaus $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ siten, että $T(M) = M - M^T$. ($\mathbb{R}^{2\times 2}$ on reaalisten 2×2 matriisien joukko.)

   (a) Määrää T:n ydin $N(T)$.

   (b) Etsi $\mathbb{R}^{2\times 2}$:lle jokin kanta ja sen suhteen lineaarikuvauksen T matriisi.

V Kyseessä on kuvaus matriisien joukolta itselleen. $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, eräs kanta

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =: \{M_1, M_2, M_3, M_4\}.$$

Tässä kuvauksessa matriisi saadaan tukimalla kanta-alkioiden kuvautumista

$$\begin{aligned} T(M_1) &= M_1 - M_1^T = 0 \\ T(M_2) &= M_2 - M - 2^T = M_2 - M_3 \\ T(M_3) &= M_3 - M_3^T = M_3 - M_2 \\ T(M_4) &= M_4 - M_4^T = 0 \end{aligned}$$

josta kustakin saadaan matriisin sarakeet:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Määritelmän mukaan

$$N(T) = \{M | T(M) = M - M^T = 0\} = \{M \text{ symmetrinen}\}.$$

4. Laske matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

PLU-hajotelma ($PA = LU$, missä P on permutaatiomatriisi).

V

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

5. $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jos $A+iB$ on unitaarinen niin osoita, että $Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ on ortogonaalinen.

(Unitaarisen ja ortogonaalisen matriisin määritelmät = 2p)

V

$(A+iB)^H(A+iB) = (A^T - iB^T)(A+iB) = (A^TA+B^TB)+i(A^TB-B^A) = I \Leftrightarrow A^TA+B^TB = I \quad \text{ja} \quad A^TB-B^A = 0$

Toisaalta Q on ortogonaalinen joss $Q^TQ = I$:

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^TA + B^TB & A^TB - B^A \\ A^TB - B^A & A^TA + B^TB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

6. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jordanin muoto. Onko A defektiivinen?

V Haetaan ominaisarvot:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 1 + (3-\lambda) = (2-\lambda)^3$$

Ratkaistaan ominaisvektorit ominaisarvolle $\lambda = 2$:

$$(A - \lambda I)v = 0 \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & \alpha \end{pmatrix}^T$$

Geometrinen kertaluku kaksi, siis defektiivinen, Jordanmuoto on

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ratkaistaan vielä muunnos. Valitaan ominaisvektorit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^T \quad \text{ja} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Ratkaistaan vielä muunnosmatriisi S etsimällä ketju: $(A - \lambda I)w_1 = v_1$ josta $w_1 = \alpha v_1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ja siis saamme

$$A = SJS^{-1}, \text{ jossa } S = \begin{pmatrix} v_1, w_1, v_2 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$