Laskuharjoitustehtäviä (osa 3)

Ako-1.115, Matriisilaskun kesäkurssi 1997

16. kesäkuuta 1997

53. Yksinkertaista sopivilla rivioperaatioilla ja laske

$$\text{a)}\quad \det\begin{bmatrix} 101 & 201 & 301 \\ 102 & 202 & 302 \\ 103 & 203 & 303 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \text{b)} \quad \det\begin{bmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & s & s^2 \\ 1 & t & t^2 \end{bmatrix}.$$

54. Olkoon $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Laske matriisit A, A^2, A^{-1}, $A - \lambda I$ sekä näiden determinantit. Millä λ:n arvoilla $|A - \lambda I| = 0$?

55.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 3 \\ 0 & 0 & b & 6 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Laske $det(-AA^TA^{-1})$ kaikilla $a, b \in \mathcal{R}$.

56. Selitä miksi Vandermonden determinantti V_4 (, joka on polynomi x:n suhteen,) on kolmatta astetta (,eli sisältää kolmannen asteen termin c_3x^3, muttei korkeamman asteen termejä).

$$V_4 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^2 & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \gamma^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$V_4(x) = 0$, kun $x = \ldots$, mitä?. Kolmannen asteen termin kerroin $c_3 = V_3 = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$, joten $V_4 = V_3(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$. Miksiköhän?

57. Tarkastellaan 4×4-matriiseja, jotka on koottu 2×2 lohkoista (tai yleisemmin $2n \times 2n$-matriiseja, jotka on koottu $n \times n$-lohkoista).

(a) Minkä vuoksi $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A||D|$?

(b) Osoita esimerkin avulla, että $|A||D| - |C||B|$ **ei** ole aina sama kuin $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

(c) Osoita esimerkillä, että myöskään $|AD - CB|$ **ei** ole yleisesti sama kuin $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$.

58. Yksinkertaista determinattia rivioperaatioilla, ja etsi $\det G_4$.

$$G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Yleisesti G_n on $n \times n$ matriisi $G_n = J_n - I_n$, jossa J_n on matriisi, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä. Laske $\det G_2$ ja $\det G_3$ ja yritä yleistää päättely $\det G_n$:lle, arvaa ainakin.

59. Laske matriisien A, $A + I$ ja A^2:n ominaisarvot ja ominaisvektorit, kun $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Mitä opit?

60. Matriisi A on singularinen ja rank$A = 1$. Etsi matriisin kolme ominaisar-

voa ja -vektoria.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

61. Olkoon lukujonossa (G_k) kukin alkio kahden edeltävän keskiarvo: $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$. Tällöin saamme peräkkäisille lukupareille (G_k, G_{k+1}) ja (G_{k+1}, G_{k+2}) yhtälön:

$$\begin{cases} G_{k+2} = \frac{1}{2}G_{k+1} + \frac{1}{2}G_k \\ G_{k+1} = G_{k+1} \end{cases} \quad \text{eli} \quad \begin{pmatrix} G_{k+2} \\ G_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} G_{k+1} \\ G_k \end{pmatrix}$$

(a) Etsi matriisi A.

(b) Etsi matriisin A ominaisarvot ja -vektorit.

(c) Mikä on raja-arvo: $\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} S\Lambda^n S^{-1}$.

(d) Edeltävää lukujonoa kutsutaan Gibonacci luvuiksi, jos $G_0 = 0$ ja $G_1 = 1$. Näytä, että raja-arvo $G_n \to \frac{2}{3}$, kun $n \to \infty$.

62. Etsi matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Millä γ:n arvoilla A on diagonalisoituva?

63. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Etsi S ja Λ s.e. $A = S\Lambda S^{-1}$. Laske e^{At}.

64. Olkoon $A^2 = A$. Osoita, että $e^{At} = I + (e^t - 1)A$. Laske edellisen tehtävän A:lla. Saatko saman tuloksen e^{At}:lle?

65. Etsi ortogonaalinen matriisi Q, joka diagonalisoi symmetrisen matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ortogonaalinen matriisi: $Q^{-1} = Q^T$.)

66. Kaikilla matriiseilla A (A:n ei tarvitse olla edes neliömatriisi) lohkomatriisi $B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$ on symmetrinen. Jos λ on B:n ominaisarvo , pätee

$$B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A\mathbf{z} = \lambda\mathbf{y} \\ A^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{z} \end{cases}$$

(a) Näytä, että $A^T A\mathbf{z} = \lambda^2\mathbf{z}$, joten λ^2 on $A^T A$:n ominaisarvo.

(b) Jos $A = I_2$, etsi kaikki B:n neljä ominaisarvoa ja -vektoria. (Tässä I_2 on 2×2-identiteettimatriisi)

67. Mille numeroille c ja d matriisit A ja B ovat positiividefiniittejä? Testaa kaikki kolme alideterminanttia:

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 1 \\ 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & d & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

68. Olkoon $A = Q\Lambda Q^T$, A:n positiividefiniitti neliöjuuri on $R = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$, laske se. Tarkista, että $R^2 = A$.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad ii)\ A = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

69. Totta vai tarua -tehtävä. Perustele vastauksesi kunnolla.

(a) Säännöllinen matriisi ei voi olla similaarinen singulaarisen matriisin kanssa.

(b) Symmetrinen matriisi ei voi olla similaarinen ei-symmetrisen matriisin kanssa.

(c) A ei voi olla similaarinen $-A$ kanssa, jos $A \neq 0$.

(d) A ei voi olla similaarinen $A + I$:n kanssa.

70. Etsi matriisin A Jordan-muoto:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vihje: Etsi ominaisarvot ja lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit (saanet kaksi: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$) täydennä nämä kannaksi vektorilla $\mathbf{x}_3$, jolle $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2$, missä λ_2 on kaksinkertainen ominaisarvo.

71. Mille seuraavista kuvauksista pätee $T(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = T(\mathbf{v})+T(\mathbf{w})$ tai toisaalta mille $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$? Olkoon $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$.

    (a) $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$

    (b) $T(\mathbf{v}) = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_n$

    (c) $T(\mathbf{v}) = (\nu_1, 2\nu_2, 3\nu_3, \ldots, n\nu_n)$

    (d) $T(\mathbf{v}) = \max_i \nu_i$

    Vihje: Mieti ensin tehtävää, kun $n = 2$, ja yleistä sitten ajatteluasi. Ainakin vastaesimerkeille se on helppoa.

72. Olkoon kuvaus $T : \mathcal{R}^{2\times2} \to \mathcal{R}^{2\times2}$ (2×2-matriisien joukolta itselleen) määritelty $T(M) = \frac{1}{2}(M + M^T)$. Näytä, että T on lineaarikuvaus, jolle pätee $T^2 = T$. Etsi myös T:n ydin ja kuva-avaruus.

73. Olkoon T kuten edellisessä tehtävässä. Onko olemassa matriisia A, siten että $T(M) = AM$ kaikilla $M \in \mathcal{R}^{2\times2}$? Etsi T:n matriisi $\mathcal{R}^{2\times2}$:n kannan

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

    suhteen.

74. Olkoon V funktioiden $\{v_i\}_{i=1}^3 = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ virittämä aliavaruus ja $T : V \to V$ määritelty $T(f) = f'$. Määrää T:n matriisi kannan $\{v_i\}_{i=1}^3$ suhteen. Mitkä ovat operaattorin T ominaisarvot ja mitkä sen ominaisfunktiot?

75. (a) Polynomille $\mathbf{w}_1(x) = (1/2)(x^2 + x)$ pätee: $\mathbf{w}_1(1) = 1$ ja $\mathbf{w}_1(-1) = \mathbf{w}_1(0) = 0$. Etsi toisen asteen polynomit $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ ja $\mathbf{y}$, siten että

    i. $\mathbf{w}_2(0) = 1, \quad \mathbf{w}_2(1) = \mathbf{w}_2(-1) = 0$

    ii. $\mathbf{w}_3(-1) = 1, \quad \mathbf{w}_3(0) = \mathbf{w}_3(1) = 0$

    iii. $\mathbf{y}(1) = 4, \quad \mathbf{y}(0) = 5, \quad \mathbf{y}(-1) = 6.$

    Käytä viimeisessä kohdassa apuna jo laskettuja polynomeja $\mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, 3$.

    (b) $\{w_i\}_{i=1}^3$ on eräs kanta toisen asteen polynomeille, mutta myös $\mathbf{v}_1(x) = 1, \mathbf{v}_2(x) = x$ ja $\mathbf{v}_3(x) = x^2$ on kanta. Etsi kannanvaihtomatriisit $A : \{\mathbf{w}_i\} \to \{\mathbf{v}_i\}$ ja $B : \{\mathbf{v}_i\} \to \{\mathbf{w}_i\}$

    (c) Mitkä ovat kolme yhtälöä kertoimille A, B, C, jos polynomille $y(x) = A + Bx + Cx^2$ pätee $y(a) = 4, y(b) = 5$ ja $y(c) = 6$? Etsi kyseisen 3×3 -matriisin determinantti. Mille luvuille a, b, c on mahdotonta löytää tällaista polynomia y?

76. Laske matriisille

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    singulaariarvohajoitelma ja pseudoinverssi.

77. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 0.005x_1 + x_2 & = & 0.5 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}$$

    ensin ilman tuentaa ja sitten osittaistuentaa käyttäen. Käytä laskuissa kahden merkitsevän numeron tarkkuutta (pyöristä jokaisen välivaiheen jälkeen).

    Toista samat laskut (algebrallisesti ekvivalentille) yhtälöryhmälle, jossa ylempi yhtälö on skaalattu:

$$\begin{cases} x_1 + 200x_2 & = & 100 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \end{cases}.$$

    Johtopäätös?

78. Oletetaan, että A on $n\times n$ yläkolmiomatriisi. Näytä, että sen kääntämiseen tarvittavien laskutoimitusten määrä on likimain $\frac{1}{6}n^3$, kun käytät kääntämiseen takaisinsijoitusta kullekin yksikkömatriisin I sarakkeelle erikseen.

79. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q_{21} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

    (a) Valitse $\sin\theta$ ja $\cos\theta$, niin että $Q_{21}A = R$, missä R on yläkolmiomatriisi.

    (b) Valitse $\sin\theta$ ja $\cos\theta$, niin että $Q_{21}AQ_{21}^{-1}$ on yläkolmiomatriisi.

80. (a) Selitä miksi matriiseilla A ja A^{-1} on välttämättä sama häiriöalttius.

(b) Osoita, että mielivaltaisen matriisin A häiriöalttius on vähintään yksi käyttämällä hyväksi normiepäyhtälöä $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$.

81. Ortogonaalisten matriisien normi $\|Q\| = 1$. Jos $A = QR$ (QR-hajotelma), niin näytä, että $\|A\| \le \|R\|$ ja myös $\|R\| \le \|A\|$, eli $\|A\| = \|R\|$. Etsi esimerkki matriisista $A = LU$ (LU-hajotelma), jolle $\|A\| < \|L\|\,\|U\|$.

82. Olkoot

$$A = \begin{pmatrix} 0.780 & 0.563 \\ 0.913 & 0.659 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.000 \end{pmatrix}.$$

(a) Yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tarkka ratkaisu on $\mathbf{x} = (1, -1)$. Kumpi on parempi likiratkaisu $\mathbf{y}$ vai $\mathbf{z}$, jos virhettä mitataan laskemalla *residu-aalien* $\mathbf{b} - A\mathbf{y}$ ja $\mathbf{b} - A\mathbf{z}$ normit? Kumpi on parempi, jos mitataan suoraan tarkan ratkaisun ja likiratkaisun erotuksen normia.

(b) Laske A:n determinantti ja A^{-1}.

(c) Laske $\|A\|$ ja $\|A^{-1}\|$ ja häiriöalttius $c = \|A\|\|A^{-1}\|$.

83. Osoita, että, jos yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kerroinmatriisi A on singulaari-nen, niin hajotelmaan $A = S - T$ liittyvällä iteraatiomatriisilla $S^{-1}T$ on ominaisarvo $\lambda = 1$. Toisin sanoen suppenevaa iteraatiota ei voida muodostaa.

(Hajotelmaan $A = S - T$ liittyvä iteraatio on siis muotoa: $S\mathbf{x}_{k+1} = T\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}_{k+1} = S^{-1}T\mathbf{x}_k + S^{-1}\mathbf{b}$.)

84. Laske iteraatiomatriisin $B = S^{-1}T$ ominaisarvot, kun yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} 3u - v &= 4 \\ -u + 3v &= -2 \end{aligned}$$

iteratiiviseen ratkaisuun käytetään (a) Jacobin menetelmää (b) Gauss-Seidelin menetelmää. Mikä yhteys sitoo vastaavien iteraatiomatriisien spektraalisäteitä $\rho(B_{Jacob})$ ja $\rho(B_{G-S})$?

(Vihje: Ensimmäiseen tehtävän merkintöjä käyttäen Jacobin menetelmässä S on T:n diagonaali ja Gauss-Seidelin menetelmässä S on T alakolmio-osa mukaanlukien diagonaali.)

85. (a) Aja kolme kierrosta potenssimenetelmällä $\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{u}_k$, kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mitä ominaisvektoria kohden menetelmä suppenee?

(b) Toimi kuten kohdassa a), mutta käytä käänteistä potenssimenetelmää $\mathbf{u}_{k+1} = A^{-1}\mathbf{u}_k$. Mitä ominaisvektoria kohden nyt lähestytään?

86. Määritä

$$\lim_{k\to\infty} T^k x,$$

missä $T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ ja $x = [2, 1]^T$.

87. (a) Olkoot $A = A_1 + iA_2$ kompleksinen $n \times n$-matriisi ja $\mathbf{b} = \mathbf{b_1} + i\mathbf{b_2}$ kompleksinen vektori. Ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ voidaan kirjoittaa $\mathbf{x} = \mathbf{x_1} + i\mathbf{x_2}$. (Tässä $A_i, \mathbf{x}_i$ ja $\mathbf{b}_i$ ovat reaalisia.) Kirjoita yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ reaalisena $2n \times 2n$-systeeminä:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

(b) Reaalisen vinosymmetrisen matriisin ($A^T = -A$) ominaisarvot ovat kaikki puhtaasti imaginaarisia. Todistaaksesi edellinen väite, näytä ensin, että jos $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, niin lohkomatriisitulo

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{x} \end{pmatrix} = i\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ i\mathbf{x} \end{pmatrix}$$

Tämä lohkomatriisi on symmetrinen, niinpä sen ominaisarvojen on oltava... mitä? Niinpä λ yllä on... mitä?

88. Laske $\det(P_4 - \lambda I)$, ominaisarvot ja ominaisvektorit permutaatiomatriisille

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

89. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & i \\ 1 & i & i \end{pmatrix}.$$

Ratkaise yhtälö $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Näytä, että $\mathbf{z}$ on ortogonaalinen A^H:n sarakkeiden kanssa. Näytä, että $\mathbf{z}$ ei ole ortogonaalinen A^T:n sarakkeiden kanssa. Ne neljä kuuluisaa aliavaruutta kompleksisille matriiseille ovat $R(?)$, $N(?)$, ... Mitkäköhän ovat niiden dimensiot $m \times n$-matriisille A, ja mitkä niistä ovat toistensa ortogonaalikomplementteja? (Ei tarvitse todistaa.)

90. Totta vain tarua -tehtävä. Perustele vastaus joko lyhyesti, negatiivisessa tapauksessa riittää luonnollisesti vastaesimerkki.

    (a) Jos A on reaalinen matriisi, niin $A + iI$ on säännöllinen.

    (b) Jos A on hermiittinen matriisi, niin $A + iI$ on säännöllinen.

    (c) Jos U on unitaarinen matriisi, niin $U + iI$ on säännöllinen.

91. Olkoon

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1+i \\ 1+i & i \end{pmatrix}.$$

Diagonalisoi vinohermiittinen matriisi $K = U\Lambda U^H$ ($\Lambda_{ii} = \lambda_i$). Mikä on yhteistä kaikille λ_i.

92. Jos $A+iB$ on hermiittinen (A, B reaalisia), niin osoita, että $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ on symmetrinen.

93. Olkoon A kompleksinen neliömatriisi. Miten A^H:n ominaisarvot liittyvät A:n ominaisarvoihin?

94. (a) Jos a_{ij}:t ovat $n \times n$ neliömatriisin A alkiot ja

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \quad i = 1, \ldots, n,$$

niin osoita, että A:n kaikki ominaisarvot ovat itseisarvoltaan ykköstä pienempiä. (Vihje: Jos x_i on $\mathbf{x}$:n itseisarvoltaan suurin komponentti ja tehtävän oletus on voimassa, niin osoita, että $|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| < |x_i|$. Mikä on edellisen epäyhtälön vasen puoli, jos $\mathbf{x}$:ksi asetetaan A:n ominaisvektori?)

    (b) **Gershgorinin ympyrät** Osoita: Jokainen A:n ominaisarvo kuuluu johonkin kompleksitason kiekkoon $|z - a_{ii}| \leq r_i$, missä kiekon keskipiste a_{ii} on A:n diagonaalialkio joltakin riviltä i ja kiekon säde

$$r_i = \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

missä summeeraus siis käy yli rivin i muiden alkioiden. (Resepti: Ota taas $\mathbf{x}$:ksi A:n ominaisvektori. Ilmeisesti $(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \ldots n$, missä λ on vastaava ominaisarvo. Valitse se rivi i, millä on $\mathbf{x}$:n itseisarvoltaan suurin komponentti, ota itseisarvot edellisestä yhtälöstä ja arvioi oikeaa puolta ylöspäin.)