# Laskuharjoitustehtäviä (osa 2)

Ako-1.115, Matriisilaskun kesäkurssi 1997

5. kesäkuuta 1997

36. Muunna yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

yläkolmiomuotoon. Mitkä ovat tukialkiot? Mitkä rivioperaatiot teit? Ratkaise $x, y$ ja $z$.

37. On ratkaistava eliminoimalla yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} x + by &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

Millä $b$:n arvoilla tarvitaan rivinvaihto? Millä $b$:n arvoilla ei löydy kolmea tukialkiota? Määrää kaikki ratkaisut tässä tapauksessa.

38. Sievennystä matriiseilla..

   a) Mikä $3 \times 3$ matriisi $E$ tekee seuraavat peräkkäiset operaatiot kerrottaessa operaatioiden kohteena oleva matriisi vasemmalta $E$:llä.
   **I** Vähennetään rivi 1 rivistä 2.
   **II** Vähennetään rivi 1 rivistä 3.
   **III** Vähennetään rivi 2 rivistä 3.

   b) Mikä $3 \times 3$ matriisi $L$ tekee seuraavat peräkkäiset operaatiot toiselle matriisille kerrottaessa vasemmalta $L$:llä.
   **I** Lisätään rivi 2 riviin 3.
   **II** Lisätään rivi 1 riviin 3.
   **III** Lisätään rivi 1 riviin 2.

   c) $LE$ ?

39. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tämän $4 \times 4$-matriisin eliminointimatriisit ovat $E_{21}$, $E_{32}$ ja $E_{43}$ (ts. matriisit, joilla vasemmalta kertominen tuottaa vastaavan rivioperaation). Mitä nämä matriisit ovat?

40. Totta vai tarua?

   (a) Jos $A^2$ on määritelty, niin $A$ on neliömatriisi.
   (b) Jos $AB$ ja $BA$ ovat määriteltyjä, niin $A$ ja $B$ ovat neliömatriiseja.
   (c) Jos $AB$ ja $BA$ ovat määriteltyjä, niin $AB$ ja $BA$ ovat neliömatriiseja.
   (d) Jos $AB = B$ niin $A = I$.

   Perustele!

41. Matriisien kertolaskua.

   (a) Oletetaan, että matriisin $B$ 5. sarake on nolla. Mitä voidaan sanoa matriisin $AB$ sarakkeista?
   (b) Oletetaan, että matriisin $A$ 3. ja 4. rivi ovat samoja. Mitä voidaan sanoa matriisin $AB$ riveistä?
   (c) Oletetaan, että matriisin $AB$ viimeinen sarake on nolla. Mitä voidaan sanoa matriiseista $A$ ja $B$?

42. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Laske $AB$, $BA$, $(CA)\mathbf{d}$ ja $C(A\mathbf{d})$ sulkujen osoittamassa järjestyksessä. Päättele (älä laskea runksuta) tästä päteekö nyt

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

43. Laske

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 11 \\ 1 & 3 & -15 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 2 & & & 0 & \\ & & 3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & 99 & \\ & & & & & 100 \end{bmatrix}^{-1}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 1 \\ 6 & 19 & -8 & -6 \end{bmatrix}^{-1}$ (d) $\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & 2 & \\ & & & 3 & & \\ & & \cdots & & & \\ & 99 & & & 0 & \\ 100 & & & & & \end{bmatrix}^{-1}$

44. Ratkaise yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kun

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

45. Laske

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

46. Ratkaise matriisi $X$:

(a) $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $X \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

47. Määrää $PA = LU$ hajotelmat, kun

$$\text{(a)}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \text{(b)}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

48. Osoita, että jos $A^{n+1} = 0$, niin $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n$.

49. Laske $R(A), N(A), R(A^2), N(A^2), R(A^3), N(A^3), R(A^4)$ ja $N(A^4)$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Onko totta, että $R(A) \cap N(A) = \emptyset$?

50. Palauta seuraavat matriisit porrasmuotoon $U$ ja sievennettyyn porrasmuotoon $R$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}.$$

Mitkä ovat vapaita muuttujia (*free variables*) ja mitkä sidottuja muuttujia (*pivot variables*)? Etsi homogeenisen yhtälön erikoisratkaisu kullekin vapaalle muuttujalle. (Aseta vuorollaan kukin vapaa muuttuja ykköseksi ja muut nollaksi.)

51. Anna esimerkkejä matriiseista, joille yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaisujen lukumäärä on

   (a) $\mathbf{b}$:stä riippuen 0 tai 1.

   (b) $\mathbf{b}$:stä riippumatta $\infty$.

   (c) $\mathbf{b}$:stä riippuen 0 tai $\infty$.

   (d) $\mathbf{b}$:stä riippumatta 1.

52. Redusoi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ muotoon $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (Gauss) ja tämän jälkeen muotoon $R\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (Gauss-Jordan), kun

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \text{ ja } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Etsi yksityisratkaisu $\mathbf{x}_p$, kaikki homogeenisen yhtälön ratkaisut $\mathbf{x}_n$ ja yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ yleinen ratkaisu.