Avoin Korkeakoulu

Ako-1.115 Matriisilasku Pfaler/Kemppainen
harjoitustehtäviä/kesä 1997

1. Etsi yksikkövektori, joka on kohtisuoraan vektoreita $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vastaan.

2. Olkoot $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ yksikkövektoreita. Näytä, että $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ on kohtisuorassa $\mathbf{u}-\mathbf{v}$:tä vastaan.

3. Valitse kolme numeroa x, y ja z, siten että ne summautuvat nollaksi $x+y+z=0$. Mikä on kulma vektoreiden $\mathbf{u}=(x,y,z)$ ja $\mathbf{w}=(z,x,y)$ välillä. Selitä samalla (jos uskallat) miksi $\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|}$ on aina $-1/2$.

4. Laske kullekin $A\mathbf{x}$ tulo pistetulona matriisin vaakarivien ja pystyvektoreiden välillä.

$$i)\ A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ii)\ A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Laske toisaalta sama tulo matriisin A pystysarakkeiden kombinaationa: i) -kohdassa

$$A\mathbf{x} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdots = ?.$$

5. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Piirrä vektorit $A^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, \ldots, 6$, kun $\alpha = \pi/3$. Mitä $A\mathbf{u}$ on yleisellä $\alpha \in [0, \pi]$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$? (Vihje: laske $\frac{<A\mathbf{u},\mathbf{u}>}{\|\mathbf{u}\|\|A\mathbf{u}\|}$.)

6. Redusoi yhtälösysteemi

$$\begin{aligned} 2x + 3y + x &= 1 \\ 4x + 7y + 5z &= 7 \\ -2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

yläkolmiomuotoon. Ympyröi tukialkiot. Ratkaise x, y ja z takaisinsijoituksella. Kaksi rivioperaatiota riittää, jos nolla (kerroin) ilmestyy mihin paikkaan?

7. Millä q:n arvolla systeemi on singulaarinen, ja millä t:n arvoilla systeemillä on rajattomasti ratkaisuja? Etsi ratkaisu, jolla $z = 1$.

$$\begin{cases} x + 4y - 2z &= 1 \\ x + 7y - 6z &= 6 \\ 3y + qz &= t \end{cases}$$

8. Paraabeli $y = ax^2+bx+c$ kulkee pisteiden $(x, y) \in \{(0, 4), (2, 8), (3, 14)\}$ kautta. Muodosta matriisiyhtälö tuntemattomille kertoimille (a, b, c). Ratkaise yhtälö eliminoimalla.

9. Määritellään

$$Ax = f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sovella eliminaatiota täydennettyyn matriisiin $A' = [Af]$. Mistä tiedät ettei alkuperäisellä systeemillä ole ratkaisua. Muuta yhtälön oikeaa puolta, viimeistä numeroa (6) siten, että yhtälöllä on ratkaisu.

10. Etsi kokeilemalla esimerkit matriiseista, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$\begin{array}{ll} i)\ A^2 = -I & ii)\ BC = -CB \neq 0 \\ iii)\ D \neq 0,\ D^2 = 0 & iv)\ E^2 \neq 0,\ E^3 = 0 \end{array}$$

Vihje: iv -kohdassa tarvitaan vähintään 3×3-matriisi, muissa kohdissa riittää 2×2-matriisi.

11. Näytä

    i) Jos neliömatriisien A ja B tulo $C = AB$ on säännöllinen, niin myös A on säännöllinen. Lausu A:n käänteismatriisi B:n ja C^{-1}:n avulla.

    ii) Jos B on A^2:n käänteismatriisi, niin osoita, että AB on A:n käänteismatriisi.

12. Etsi A^{-1}, jos löytyy, soveltaen Gaussin-Jordanin eliminaatiota matriisiin $[A\ I]$.

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad ii)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Vastaa perustellen.

    (a) Lineaarisella yhtälöryhmällä ei voi olla täsmälleen kahta ratkaisua. Miksi?

    (b) Jos kolme tasoa R^3:ssa leikkaavat kahdessa pisteessä, niin missä muualla ne leikkaavat.

14. Laske sopivasti osittamalla matriisitulo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

15. Ratkaise alakolmiomuodossa oleva yhtälö $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ja sitten yläkolmiomuodossa oleva $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ja päättele ratkaisu yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä $A = LU$. Ratkaise vielä yhtälö $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ suoraankin; laske ensin matriisi $A = LU$ ja ratkaise sitten Gaussilla.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

16. Olkoon R $m \times n$ matriisi ja A symmetrinen $m \times m$-matriisi.

   (a) Näytä, että $R^T AR$ on symmetrinen. Minkä kokoinen matriisi on?

   (b) Näytä, että $R^T R$:llä ei ole negatiivisia numeroita diagonaalillaan.

17. Etsi $PA = LU$ -hajotelma matriisille A. Tarkista, että hajotelmasi on ok.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Olkoon M kaikkien 2×2-matriisien muodostama vektoriavaruus (on se vektoriavaruus, tarkista vaikka). Mitkä seuraavista ovat M:n aliavaruuksia?

   (a) Symmetriset 2×2-matriisit.

   (b) Singulaariset 2×2-matriisit.

   (c) 2×2-matriisit, joiden *jälki*, eli diagonaalialkioiden summa, on nolla.

19. Rivioperaatioilla redusoi A redusoituun porrasmuotoonsa U. Etsi (päättele tekemistäsi rivioperaatioista), mikä on sellainen matriisi (2×2), jolle $A = LU$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   Määritä myös $N(A)$, A:n nolla-avaruus.

20. Konstruoi matriisi, jonka sarakeavaruus $R(A)$ sisältää vektorit $[1, 1, 0]^T$ ja $[0, 1, 1]^T$ ja nolla-avaruus $N(A)$ sisältää vektorit $[1, 0, 1]^T$ ja $[0, 0, 1]^T$.

21. Olkoon A säännöllinen $n\times n$ -matriisi ja B säännöllinen $m\times m$ -matriisi. Etsi ositetun matriisin

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$$

käänteismatriisi M^{-1}. Tässä C on jokin $m \times n$ -matriisi ja 0 on $n \times m$ -nollamatriisi.

Vihje: Kirjoita

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$$

ja ratkaise X_i:t yhtälöstä $MM^{-1} = I$.

22. Olkoot A, B ja C $n \times n$ -matriiseja, joista A ja B ovat symmetrisiä. Mitkä seuraavista ovat symmetrisiä?

(a) $A^2 - B^2$ (b) $(A+B)(A-B)$ (c) ABA^2
(d) CAC (e) $C^T BABC$ (f) $(AC)^T AC$.

23. Näytä, että aina pätee $N(AB) \subset N(B)$, ja jos A on säännöllinen, niin pätee tarkemminkin $N(AB) = N(B)$.

24. Mikä ehto $\mathbf{b}$:n tulee toteuttaa, jotta $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:llä olisi ratkaisu?

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 9 & -8 \end{pmatrix} \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

25. Redusoi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ muotoon $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ (Gauss) ja tämän jälkeen muotoon $R\mathbf{x} = \mathbf{d}$ (Gauss-Jordan), kun

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Etsi yksityisratkaisu $\mathbf{x}_p$ sekä kaikki homogeenisen yhtälön ratkaisut $\mathbf{x}_n$.

26. Olkoot $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ ja $\mathbf{w}_3$ lineaarisesti riippumattomat. Näytä, että

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

ovat lineaarisesti riippumattomat, mutta

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$$

eivät ole.

27. Etsi kannat avaruuksille $R(A)$, $R(A^T)$, $N(A)$ ja $N(A^T)$, kun

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$iii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

28. Olkoon

$$A = BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Etsi A:n ydin (riviavaruus) $N(A)$ ja kuva (sarakeavaruus) $R(A)$ *kertomatta matriiseja keskenään.* Miten voimme päätellä B:n ja C:n muodoista suoraan, että A ei ole säännöllinen (invertoituva).

29. Mitkä seuraavista ovat $\mathbf{R}^3$:n aliavaruuksia?

(a) $\{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \mid b_1 = -b_3\}$

(b) $\{\mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \mid b_1 b_2 b_3 = 0\}$

(c) { kaikki vektoreiden $(1, 4, 0)$ ja $(1, -1, 1)$ lineaarikombinaatiot }

Olkoon $\mathbf{F}$ kaikkien jatkuvien funktioiden $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ joukko laskutoimituksilla $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, kun $\alpha \in \mathbf{R}$. Mitkä seuraavista ovat $\mathbf{F}$:n aliavaruuksia?

(d) $\{f \in \mathbf{F} \mid f(2) - f(1) = 2f(0)\}$

(e) $\{f \in \mathbf{F} \mid f(1) \leq f(3)\}$

(f) $\{f \in \mathbf{F} \mid f(x) \equiv f(1 - x)\}$ ($\equiv$ tarkoittaa identtisesti, eli kaikilla x)

30. Olkoon S kahden vektorin virittämä aliavaruus:

$$S = \operatorname{span}\{(1, 2, 2, 3), (1, 3, 3, 2)\}$$

Etsi kaksi vektoria, jotka virittävät $S^\perp$:n (S:n ortogonaalikomplemetti).

31. Seuraavat väitteet ovat epätosia:

(a) $(1, 1, 1)$ on kohtisuorassa vektoria $(1, 1, -2)$ vastaan. Niinpä tasot $x + y + z = 0$ ja $x + y - 2z = 0$ ovat keskenään ortogonaalisia aliavaruuksia.

(b) Kaksi suoraa, origon $(0, 0, 0)$ ja pisteen $(2, 4, 5)$ kulkeva suora ja toisaalta origon ja pisteen $(1, -3, 2)$ kautta kulkeva suora, ovat ortogonaalikomplementteja.

(c) Jos kahdella aliavaruudella on yhteinen piste vain origossa, (jossa sellainen aina on,) aliavaruudet ovat ortogonaalisia.

Perustele miksi.

32. Täydennä '???':t.

    (a) Jos P on 2×2-projektiomatriisi origon ja pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevalle suoralle, tällöin $I - P$ on projektiomatriisi ???:lle.

    (b) Jos P on 3×3-projektiomatriisi origon ja pisteen $(1, 1, 1)$ kautta kulkevalle suoralle, tällöin $I - P$ on projektiomatriisi ???:lle.

    Konstruoi vielä matriisit P.

33. On etsittävä origon kautta kulkeva kolmannen asteen polynomi, joka kulkee mahdollisimman läheltä pisteitä (1,1), (2,2), (3,1) ja (4,2). Kirjoita yhtälö polynomin kertoimille.

34. Etsi ortonormaalit $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ ja $\mathbf{q}_3$ lineaarikombinaatioina A:n sarakkeista ja laske A:n QR-hajoitelma.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

35. Etsi ortonormaali kanta A:n kuvalle $R(A)$. Laske $\mathbf{b}$:n projektio $R(A)$:lle. Mikä on A:n QR-hajotelma? Mikä $\mathbf{x}$ minimoi $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|$:n?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$