1. Olkoon $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ $\mathcal{F}_n$–mitallinen martingaali. Olkoon S "stopping time", s.e. $\mathbf{P}(S<\infty)=1$, $\mathbf{E}(|X_S|)<\infty$ ja $\int_{\{S>n\}}|X_n|\,d\mathbf{P}\to 0$ kun $n\to\infty$. Osoita, että $\int_{\{S>n\}}\left|X_{S(\omega)}(\omega)\right|d\mathbf{P}(\omega)\to 0$ ja $\mathbf{E}(|X_{S\wedge n}-X_S|)\to 0$ kun $n\to\infty$.

2. Olkoon $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia joilla $\mathbf{P}(Y_n=1)=\mathbf{P}(Y_n=-1)=\frac{1}{2}$ kaikilla $n=0,1,\ldots$. Olkoon $\mathcal{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(Y_1,Y_2,\ldots,Y_n)$, $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$, $n=1,2,\ldots$. Määritellään

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & , \quad x>1\\ 0 & , \quad x=0\\ -1 & , \quad x<0\end{cases}$$

sekä M_0=0, $M_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sgn}(S_{k-1})Y_k$, $n=1,2,\ldots$. Osoita, että M_n on martingaali sekä määrää prosessin $\{|S_n|\}_{n=0}^{\infty}$ Doobin hajotelma.