

Mat-1.3608 Markovin ketjut.

II Harjoitus 31.1. 2008 Tikanmäki/Valkeila.

1. Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi P muotoa

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Hae ketjun tasapainojakauma π . Onko ketju kääntyvä?

2. Olkoon $p_{ij}^n = \mathbb{P}(X_n = s_j | X_0 = s_i)$. Osoita, että pätee:

(a) $p_{ij}^{n+1} = \sum_{l=1}^k p_{il}^n p_{lj}$.

- (b) Jos $p_{ij}^n \rightarrow \pi_j$, kun $n \rightarrow \infty$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, niin $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ on tasapainojakauma.

3. Olkoon $X = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ (η, P) Markovin ketju. Oletetaan, että X on jaksoton ja kommunikoiva. Olkoon ketjun tasapainojakauma π . Olkoon $Y = (Y_0, Y_1, Y_2, \dots)$ ketjusta X riipumaton (π, P) Markovin ketju. Olkoon $W_n = (X_n, Y_n)$. Osoita, että

- (a) W on Markovin ketju, tilavarauutena $S \times S$, alkujakaumana $\tilde{\eta} = (\eta, \pi)$ ja siirtymätodennäköisyysmatriisina \tilde{P} , missä

$$\tilde{P}^{(i,j)(k,l)} = p_{ik} p_{jl}.$$

- (b) Tasapainojakauma on $\tilde{\pi}^{(i,j)} = \pi_i \pi_j$.

4. [Jatkoa] Osoita, että W on myös jaksoton ja kommunikoiva, ja että sen tasapainojakauma on $\tilde{\pi}^{(i,j)} = \pi_i \pi_j$.

5. Olkoon X Markovin ketju, jolla on siirtymätodennäköisyysmatriisina P , missä P on muotoa

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Näytä, että sekä $\pi = (0.375, 0.625, 0, 0)$ että $\tilde{\pi} = (0, 0, 0.5, 0.5)$ ovat tasapainojakaumia. Onko ketju kääntyvä?

6. Olkoon X kääntyvä Markovin ketju, jakaumana π . Osoita, että jos ketju käynnistetään alkujakaumana π , niin

$$\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, \dots, X_n = s_{i_n}) = \mathbb{P}(X_0 = s_{i_n}, \dots, X_n = s_{i_0}).$$

[Yllä oleva kaava osoittaa, että ketjun ajan voi kääntää.]