

### Mat-1.3608 Markovin ketjut.

Harjoitus 24.1. 2008 Tikanmäki/Valkeila.

1. Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi  $P$  muotoa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Selvitä, mitkä tilat kommunikoivat? Onko matriisissa osia, mitkä ovat suljettuja kommunikoinnin suhteen?

2. Olkoon  $\eta$  jakauma tila-avaruudella  $S = \{s_0, \dots, s_k\}$  ja  $P$  siirtymätodennäköisyysmatriisi. Osoita, että  $X$  on  $(\eta, P)$  markovin ketju jos ja vain jos kaikilla  $n \geq 1$  on voimassa

$$\mathbb{P}(X_0 = s_{i_0}, \dots, X_n = s_{i_n}) = \eta_{s_{i_0}} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

3. Olkoon  $X$   $(\eta, P)$  Markovin ketju. Olkoon  $Y_n = X_{kn}$ , missä  $k > 1$  on vakio. osoita, että  $Y$  on  $(\eta, P^k)$  Markovin ketju.
4. Olkoon siirtymätodennäköisyysmatriisi  $P$  muotoa

$$P = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Olkoon Markovin ketjun alkujakauma  $\mu^0 = (1, 0)$ . Osoita, että

(a)  $\mu^n = (\frac{1}{2}(1 + 2^{-n}), \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}))$ .

(b) Laske raja-arvo  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n$

[OH, problem 2.3]

5. Olkoon  $P$  kommunikoiva:  $s_i \leftrightarrow s_j$  kaikilla  $s_i, s_j \in S$ . Osoita, että jos  $p_{ii} > 0$ , niin  $P$  on jaksoton. [OH, problem 4.2]
6. Tilan  $s_i$  jakso määriteltiin kaavalla  $d(s_i) = \text{s.y.t.}\{n : (P^n)_{ii} > 0\}$ . Osoita: jos  $s_i \leftrightarrow s_j$ , niin  $d(s_i) = d(s_j)$ .