ti 11.11.08

Symmetrisen matriisin diagonalisointi

orthsymm.pdf (Pitäydytään tässä reaalisissa matriiseissa)
LAY 7.1 : Diagonalization of symmetric matr.
KRE[9] 8.4 : Eigenbases, diagonalization, Quadr. forms

Symmetrinen matriisi : $A^T = A$

Esim

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 6-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \ldots -(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-3)$$

(kuin ihmeen kautta ?)

Rutiinilaskut :

$\lambda_1 = 8$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 6$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 3$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ LRT, mutta ei siinä kaikki !

$$\begin{cases} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1^T v_2 = 1 - 1 + 0 = 0 \\ \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -1 + 1 + 0 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = -1 - 1 + 2 = 0 \end{cases}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ on jopa <u>ortogonaalinen</u> joukko

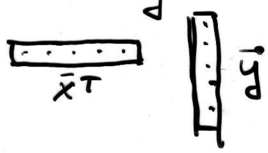
Normeeraus $|\vec{v}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{v}_2| = \sqrt{6}$, $|\vec{v}_3| = \sqrt{3}$

(Useim merk. myös: $\|\vec{v}_1\|$, ...)

$\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta:

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1, \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}_2, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}_3$$

Muista $\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \bar{x}^T\bar{y} = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$



$$\underline{(A\vec{x}_1)\cdot\vec{x}_2} = (A\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2)^T = (\bar{x}_2^T A\bar{x}_1)^T$$

[(1×1) - matr.]

$$= (A\bar{x}_1)^T\bar{x}_2 = \bar{x}_1^T A^T \bar{x}_2 = \underline{\bar{x}_1\cdot A^T\bar{x}_2}$$

$$\langle A\vec{x}_1, \vec{x}_2\rangle = \langle \vec{x}_1, A^T\vec{x}_2\rangle$$

LAUSE Jos A on symmetrinen, niin eri ominaisavaruuksiin kuuluvat vektorit ovat ortogonaaliset.

Tod: Olk. $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$, $A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2$, $\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}$

$$\underline{A\vec{x}_1}\cdot\vec{x}_2 = \underline{\lambda_1\vec{x}_1}\cdot\vec{x}_2$$

$A^T = A$ ||

$$\vec{x}_1\cdot\underline{A\vec{x}_2} = \vec{x}_1\cdot\underline{\lambda_2\vec{x}_2} = \lambda_2\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1-\lambda_2)}_{\neq 0}(\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2) = 0 \quad \Rightarrow \vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 = 0,$$

eli $\underline{\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2}$. $\square$

Ortogonaaliset matriisit

Lause Matriisin $U (n \times n)$ sarakkeet muodostavat ON joukon $\Leftrightarrow$

$$U^T U = I.$$

Tod: ($n = 3$, yl. [illegible] sama)

$$U = \left[\bar{u}_1 \,\vdots\, \bar{u}_2 \,\vdots\, \bar{u}_3 \right] \qquad U^T = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \\ \hline \bar{u}_2^T \\ \hline \bar{u}_3^T \end{bmatrix}$$

$$U^T U = \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \bar{u}_1 & \bar{u}_1^T \bar{u}_2 & \bar{u}_1^T \bar{u}_3 \\ \bar{u}_2^T \bar{u}_1 & \bar{u}_2^T u_2 & \bar{u}_2^T \bar{u}_3 \\ \bar{u}_3^T \bar{u}_1 & \bar{u}_3^T u_2 & \bar{u}_3^T \bar{u}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j \right]_{i,j} = I \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Kroneckerin δ

Siis $U^T U = I \quad \Leftrightarrow \quad \bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0$, kun $i \neq j$

ja $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1$

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = |\bar{u}_i|^2 \qquad \square$$

Määr. Matriisi $U (n \times n)$ on *ortogonaalinen* jos sillä on ortonormaalit sarakkeet.

Huom! Tällöin siis $U^T U = I$, joten

$$U^T = U^{-1}.$$

Siis myös $UU^T = I$, joten U:n rivit ovat ortonormaalit.

Tässä on jälleen "lineaarialgebran ihmeen" ilmenemismuoto.

Ortogonaalinen diagonalisointi

Aloitamme esimerkillä $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Symmetrinen matriisi

$\lambda_1 = -2$, $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_{2,3} = 6$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 0$

$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 0$ Ovat ortog.

Normeerataan: $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad U^{-1} = U^T.$$

Siis $A = UDU^T$, $D = \begin{bmatrix} -2 & & O \\ & 6 & \\ O & & 6 \end{bmatrix}$

Ortog. diagonalisointi.

<u>Huom!</u> Symmetrisen matriisin diagonalisointi ei ole automaattisesti ortogonaalinen.

(1) Vähintään täytyy ominaisvektorit normeerata. Jos kaikki ominaisarvot yksinkertaisia, tämä riittää.

(2) Jos λ on useampikertainen ominaisarvo, eivät λ:aa vastaavat LRT ominaisvektorit ole automaattisesti ortog.

Ominaisavaruudelle E_λ täytyy muodostaa ortonormaali kanta. Yleisesti tämä onnistuu ns. Gram-Schmidt'in menetelmällä. Tällä kertaa ei opetella siitä kuin 1. askel: Kahden LRT vektorin ortonormeeraus.

Ensin tämä (hehkutteen):

<u>Lause</u> $A(n \times n)$ on ortogonaalisesti diagonalisoituva $\iff$ A on symmetrinen.

<u>Tod</u>: (1) Olkoon A:lla ortog. diagonalisointi: $A = UDU^T$, U ortog.

$$\Rightarrow A^T = (UDU^T)^T = UDU^T = A.$$

(2) <u>A symm.</u> $\Rightarrow$ A:n ominaisarvot reaaliset ja A:n ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^n$:lle ON kanta.

Todistus tälle on "syvällinen" ja sivuutetaan. □

Esim 3 (Lay s. 451)

Diagonalisoi ortogonaalisesti

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 =$$

$$-(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$$

$$\lambda = 7: \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2: \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ LRT, ei OG, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -\frac{1}{2}$

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + c\vec{v}_2$$

Määrätään c s.e. $\vec{w} \perp \vec{v}_1$

$$0 = \vec{w} \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_1 + c\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 = \underbrace{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}_{2} + c\underbrace{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1}_{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad c = 4$$

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(\vec{w} \cdot \vec{v}_1 = 0 \checkmark)$

Ominaisavaruudelle N_7 saadaan siis ortog. kanta $\{\vec{v}_1, \vec{w}\}$ ja koko $\mathbb{R}^3$:lle ortog. kanta $\{\vec{v}_1, \vec{w}, \vec{v}_3\}$

[A:n symmetrisyyden takia eri ominaisarvoihin kuuluvat ominaisvektorit ovat automaattisesti ortogonaaliset.]

Sitten vain normeerataan ja ladotaan sarakki

$$\Rightarrow \quad V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 & & 0 \\ & 7 & \\ 0 & & -2 \end{bmatrix}$$

Siis $A = VDV^{-1} = VDV^T$.