Numeerisia menetelmiä parabolisille yhtälöille (KRE9 21.6.)

Lämpö/diffuusioyhtälö [Parabolisten perustyyppi]

$$\boxed{u_t = c^2 u_{xx}}$$

Sivuilteen eristetty sauva, pituus L. Annetaan alkulämpötilajakauma $f(x)$, kun $t=0$, ja päiden lämpötila $u(0,t)$, $u(L,t)$, $t \geq 0$.

Voidaan valita yksiköt/normeerata:

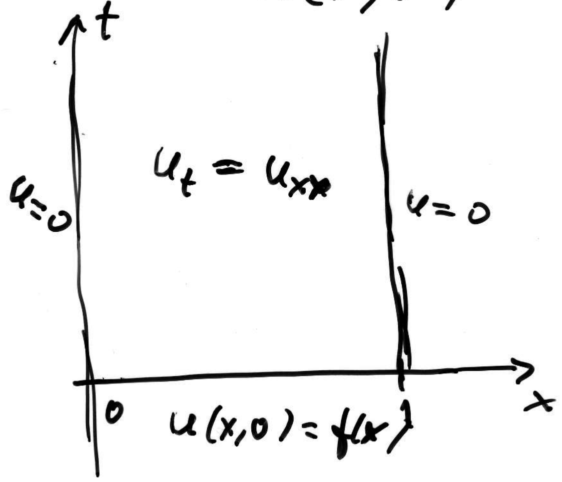
$c = 1$, $L = 1$.

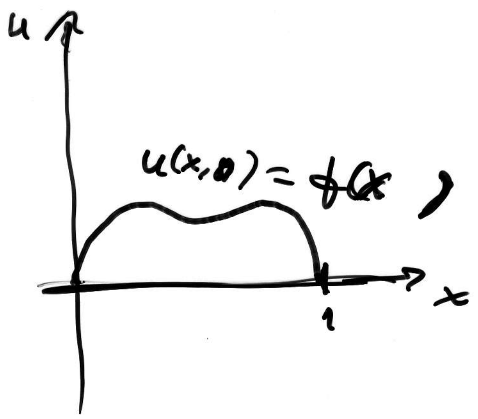
Tehtävä saa muodon

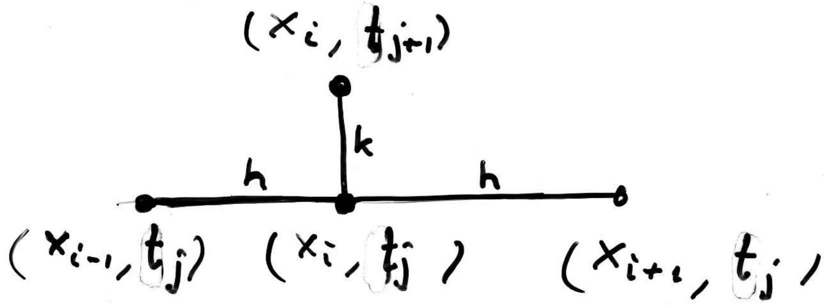
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ [Homog. RE:t]

$u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq 1$ [Alkuehto]







Sij. differenssikaavat lämpöyhtälöön $u_t = u_{xx}$;

Merk. u_{ij} = menetelmän antama approksimaatio ratkaisulle $u(x_i, t_j)$.

Tässä vielä ne differenssikaavat :

$$u_{xx}(x,t) \simeq \frac{1}{h^2}\left(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right)$$

$$u_t(x,t) \simeq \frac{1}{k}\left(u(x,t+k) - u(x,t)\right)$$

[Ajan suhteen ei voida käyttää keskidifferenssikaavaa, koska vain yksi aikataso kerrallaan tunnetaan]

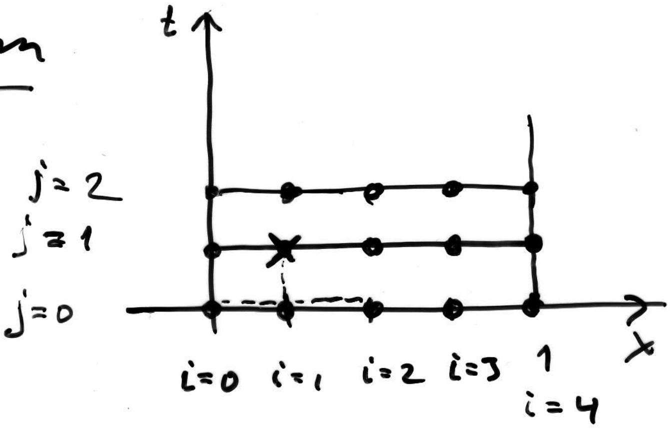
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k}\left(\underline{u_{i,j+1}} - u_{ij}\right) = \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right)$$

Merk : $r = \frac{k}{h^2}$

Ratkaistaan $u_{i,j+1}$, lausuttuna yhtä alemman aikatason j suureiden $u_{k,j}$ avulla ($k = i-1, i, i+1$).

$$\Rightarrow \quad u_{i,j+1} = (1-2r)\,u_{ij} + r\,(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

Esim



$u_{i,0}$ annettu $= f(x_i)$ (AA)

$u_{0,j}$, $u_{4,j}$ annettuja REUNA-ARVOJA

(Jos homog. RE:t, niin 0)

$$u_{1,1} = (1-2r)\,u_{1,0} + r\,(u_{2,0} + u_{0,0})$$
$$u_{2,1} = (1-2r)\,u_{2,0} + r\,(u_{3,0} + u_{1,0})$$
$$u_{3,1} = (1-2r)\,u_{3,0} + r\,(u_{4,0} + u_{2,0})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 \\ r & 1-2r & r \\ 0 & r & 1-2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \end{bmatrix} + r \underbrace{\begin{bmatrix} u_{00} \\ 0 \\ u_{4,0} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{Jos homog.} \\ \text{RE:t, niin} \\ =\,0}}$$

Yleisesti siis, jos sisäsolmuja on m kpl, niin 0-RE-tapauksessa:

$$\begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{m,j+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & \cdots & \vdots \\ 0 & r & 1-2r & r \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & r & 1-2r \end{bmatrix}}_{M \ (m \times m)} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{m,j} \end{bmatrix}$$

Uusi "aikataso" $(j+1)$ saadaan siis edelli-sesti kertomalla matriisilla M.

Esim 1 (s. 925) Simuloitaan eristetty metallisauva, $L = 1$, $c^2 = 1$.

0 – RE : t. AE : $u(x,0) = f(x) = \sin \pi x$.

Ratkaise ajassa eteenpäin.

OS: $h = 0.2$, kokeillaan eri r:n arvoille:

1) $r = 0.25$, 2) $r = 0.5$, 3) $r = 1$.

$$r = \frac{k}{h^2} \quad ; \quad k = r h^2$$

1) $k = 0.25 h^2 = 0.01$

2) $k = 0.02$, 3) $k = 0.04$

…/matlab/lampo/lampodiffE.html

Implisiittinen menetelmä: Crank – Nicolson

Otetaan u_{xx} – approksimaatioksi

$$\frac{1}{2}\left(u_{xx}(x,t) + u_{xx}(x,t+k)\right)$$

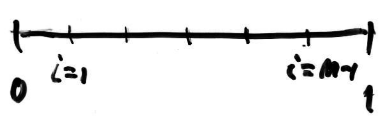
(Keskiarvo: $\left\{\begin{matrix} (x, t+k) \\ (x, t) \end{matrix}\right\}$ – arvoista)

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{k}\left(u_{i,j+1} - u_{ij}\right) = \frac{1}{2h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}\right) + \frac{1}{2h^2}\left(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}\right)$$

Kerr. $2k$:lla, merk. $r = \frac{k}{h^2}$, viedään vasemmalle aikatasoa $j+1$ koskevat termit. Saadaan:

$$(2+2r)u_{i,j+1} - r\left(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}\right) = (2-2r)u_{ij} + r\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}\right)$$



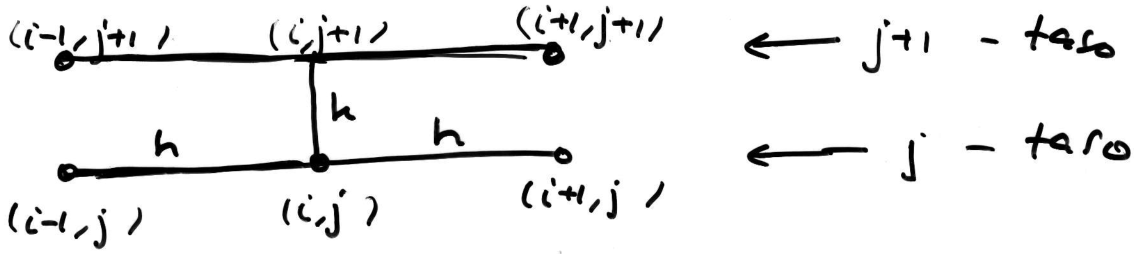
$j = 0$

m osaa, m-1 sisäsolmua

Tunnetut: $u_{i,0}$, $i = 1..m-1$

Tuntemattomat: $u_{i,1}$, $i = 1 \ldots m-1$

Yhtälöt: $i = 1 \ldots m-1$



Nyt on sallittua valita $r = 1$. Tällöin kaava sievenee:

$$4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j}$$

Θ-RE:llä saadaan:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & & \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 \\ \vdots & & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \cdots & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m-1,j+1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & - & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m-1,j} \end{bmatrix}$$

.../matlab/lampo/CRNich.m