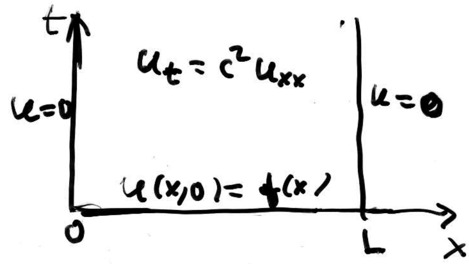
9.12.08

Analyyttisiä ratkaisumenetelmiä

Muuttujien erottelu + Fourier-sarja

1. Lämpöyhtälö



(LY) $\quad u_t = c^2 u_{xx}$

Ratkaisuyrite: $\quad u(x,t) = F(x)G(t)$

$$\left.\begin{aligned} u_t &= F(x)G'(t) \\ u_{xx} &= F''(x)G(t) \end{aligned}\right\} \text{ sijoita (LY):ään:}$$

$$FG' = c^2 F'' G$$

$$\Rightarrow \quad \frac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \qquad \forall (x,t)$$

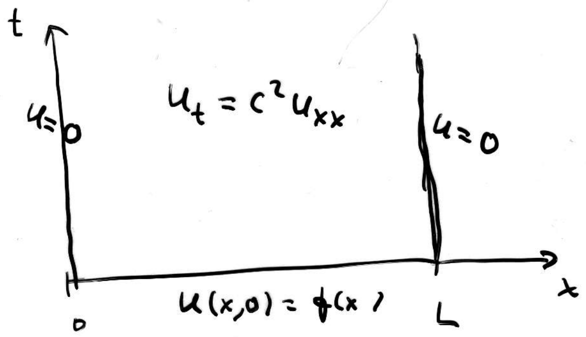
Tämä toteutuu vain, jos kummankin puoli

= sama vakio $= -p^2$, $\quad p > 0$

(miksei $+p^2$, miksei 0)

[Perustele ihan kohta]

Lämpöyhtälö



$$u_t = c^2 u_{xx}$$

$$u(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) + p^2 F(x) = 0 \\ G'(t) + c^2 p^2 G(t) = 0 \end{cases}$$

[Jos olisi – (ts. $\dfrac{G'(t)}{c^2 G(t)} = \dfrac{F''(x)}{F(x)} = +p^2$),

$$\Rightarrow \quad F(x) = c_1 e^{px} + c_2 e^{-px}$$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = C \sinh(px)$.

Mutta $\sinh(px)$ kasvava, $\sinh 0 = 0$,
joten $\sinh(pL) > 0 \quad \forall p > 0$.

Olisko $p = 0$ mahdollinen ?

$$\Rightarrow \quad F''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = ax + b$$

$F(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{b = 0}$. $\quad F(L) = 0$

$\Rightarrow \quad aL = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 0}$. EI KÄY !

$$F(x) = A \cos px + B \sin px$$

$0 = F(0) = A$; $\quad B \sin pL = 0 \Rightarrow pL = n\pi$,
$n = 1, 2, \ldots$

$$p = \frac{n\pi}{L}$$

$$F_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$G(t) = C e^{-c^2 p^2 t} \quad ; \quad G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t},$$

missä $\lambda_n = cp = \dfrac{c n \pi}{L}$

$$u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

TOTEUTTAVAT (LY):n ja 0-RE:t.

Myös $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä B_n:t vapaasti valittavissa (tosin niin, että sarja suppenee)

(AE): $u(x,0) = f(x)$ (annettu funktio)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

|| VAATIMUS

$f(x)$ TOTEUTUU VALITSEMALLA $B_n = b_n$ = f:n $2L$-jaksoisen sinisarjan kertoimeksi:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Esim 1 Määritä lämpötila $u(x,t)$ sivuiltaan eristetyssä 80cm pituisessa kuparisauvassa, kun sauvan päät pidetään 0°:ssa ja alkulämpötila: $f(x) = 100\sin\frac{\pi x}{80}$.
Miten pitkän ajan kuluttua keskipisteen lämpötila on pudonnut puoleen alkuperäisestä?
Kuparille $c^2 = 1.158$ (cm²/s)

Ratk: Lämpöyhtälö + 0 - RE:t toteutuvat funktioilla $u_n(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}$,

missä $\lambda_n = \frac{nc\pi}{L} = \frac{nc\pi}{80}$

AE: $u(x,0) = f(x) = 100 \sin\frac{\pi x}{80}$

Mutta tämähän saadaan suoraan ensimmäisellä kantafunktiolla

$$u_1(x,t) = \sin\frac{\pi x}{80} e^{-\lambda_1^2 t},$$

valitaan vain kerroin $= 100$. Siis

$$\underline{u(x,t) = 100 \sin\frac{\pi x}{80} e^{-\lambda_1^2 t}}$$

[Tällöin $u(x,0) = 100 \sin\frac{\pi x}{80} = f(x)$.]

Kuparilla $c^2 = 1.158 \ (cm^2/s)$

$$\lambda_1^2 = \frac{c^2\pi^2}{80^2} = 0.001785$$

Keskipisteessä $x = 40$, $u(40,0) = 100$.

Määritetään t_1 s.e. $u(40,t_1) = 50$

$$\Leftrightarrow \quad 100 e^{-\lambda_1^2 t_1} = 50 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1^2 t_1 = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda_1^2} = \frac{\ln 2}{0.001785} = 388\,s. \ \simeq 6.5 \text{ min}.$$

Esim 2 Sama kuin edellinen, mutta

(AE) $f(x) = u(x,0) = 100 \sin \frac{3\pi x}{80}$

Reunaehdoista seuraavat samat kantafunktiot kuin edellä:

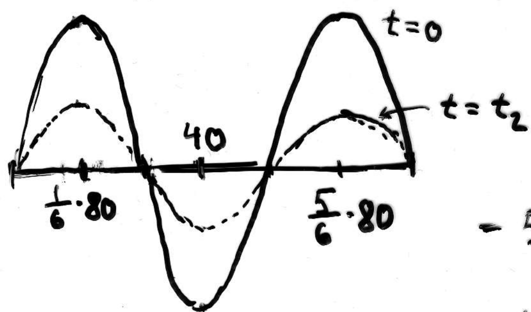
$$u_n(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{80} e^{-\lambda_n^2 t},$$

$$\lambda_n = \frac{nc\pi}{80}$$

Tällä kertaa alkuehto toteutuu valitsemalla

$$u(x,t) = 100\, u_3(x,t)$$

$$= 100 \sin \frac{3\pi x}{80} e^{-\lambda_3^2 t}$$



Max-lämpötilan "puoliintumisaika":

$$-50 = u(40, t_2) = -100 e^{-\lambda_3^2 t_2}$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda_3^2}$$

$$\lambda_3^2 = 3^2 \frac{c^2\pi^2}{L^2} = 9\lambda_1^2 \quad \Rightarrow t_2 = \frac{1}{9} t_1 = 43\,s$$

[Jos $f(x)$ olisi $100 \sin \frac{5\pi x}{80}$, olisi puoliintumisaika $t_3 = \frac{1}{25} t_1$, jne.]

Huom! Jos $f(x) = c_1 \sin \frac{k_1 \pi x}{80} + c_2 \sin \frac{k_2 \pi x}{80} + \dots + c_7 \sin \frac{k_7 \pi x}{80}$, saataisiin (AE) toteutumaan valitsemalla

$$u(x,t) = c_1 u_{k_1}(x,t) + c_2 u_{k_2}(x,t) + c_3 u_{k_3}(x,t),$$

missä $\quad u_{k_j}(x,t) = \sin\frac{k_j\pi x}{L}\, e^{-\lambda_{k_j}^2 t}$.

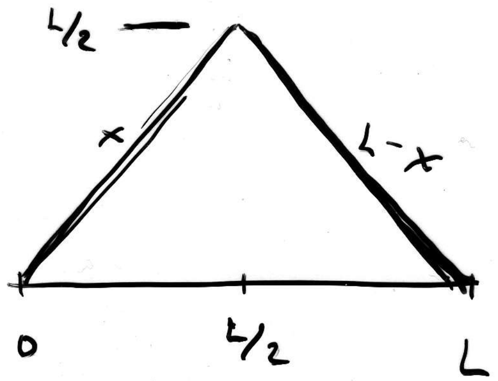
Ts. jos (AE) - funktio $f(x)$ on äärellinen lineaarikombinaatio funktioista $\sin\frac{k\pi x}{L}$, niin samoin kertoimin muodostettu lineaarikombinaatio funktioista

$$u_k(x,t) = \sin\frac{k\pi x}{L}\, e^{-\lambda_k^2 t}$$

on tehtävän ratkaisu.

Siirryttäessä tätä erityistä muotoa olevasta (AE) - funktiosta yleiseen funktioon $f(x)$, astuu Fourier-sarja näyttämölle.

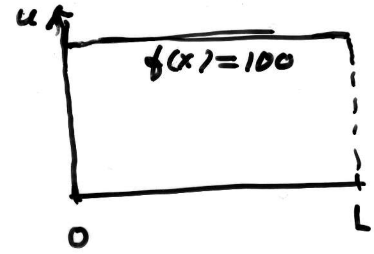
Esim 3



$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{L}{2} \\ L-x, & \frac{L}{2} < x < L \end{cases}$$

Otetaan tällä kertaa helpompi esimerkki:

Esim 3 Sama kuparisauva kuin edellä, mutta alkulämpötila = 100°



(AE) saadaan toteutumaan sarjalla:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t}$$

valitsemalla $B_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L 100 \sin \frac{n\pi x}{L} dx = - \frac{200}{n\pi} \Big/_0^L \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{200}{n\pi} \Big(1 - \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} \Big).$$

Siis $(B_n) = (b_n) = \frac{400}{\pi} \left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots \right)$

$$u(x,t) = \frac{400}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} e^{-\lambda_1^2 t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} e^{-\lambda_3^2 t} + \dots \right)$$

$$= \frac{400}{\pi} \sum_{n=1,3,5\dots} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n^2 t},$$ missä

$L = 80$, $\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$, c sama kuin edellä, $c^2 = 1.158$