Mat-1.1332 Matriisieksponenttifunktio KP3-II, syksy 2008
Pekka Alestalo/(Heikki Apiola)

Pekan ystävällisesti käyttööni antamaan LaTeX-tiedostoon olen tehnyt joitakin pieniä tyylimuutoksia, lisäyksiä ja huudahduksia *HA*

Viitteitä

`[TE]` Timo Eirola: Lineaarialgebra, luentomoniste
`[EN]` Eirola–Nevanlinna: Diffyhtälösysteemit, luentomoniste
`[BDiP]` Boyce–DiPrima: Elementary Differential Equations ..., Wiley 1997
`[19D]` Cleve Moler – Charles van Loan: Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM REVIEW Vol 4 nr. 1, 2003 (alkuperäinen versio vuonna 1978) http://www.cs.cornell.edu/cv/researchpdf/19ways+.pdf

Matriisieksponenttifunktio

Seuraavassa A on reaalinen $n \times n$-matriisi, jonka alkiot ovat vakioita. Tarkoituksenamme on ratkaista alkuarvotehtävä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$.
Tiedämme jo, että jos A on diagonalisoituva, niin ratkaisu on

$$\boldsymbol{y}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{x}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{x}_2 \ldots + C_n e^{\lambda_n t}\boldsymbol{x}_n,$$

missä $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n\}$ on $\mathbb{R}^n$:n ($\mathbb{C}^n$:n) ominaisvektorikanta ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vastaavat ominaisarvot.
Kirjoitetaan ratkaisu muotoon:

$$\boldsymbol{y}(t) = X e^{Dt}\boldsymbol{C}, \text{ missä } Dt = \mathtt{diag}(\lambda_1 t, \ldots, \lambda_n t) \text{ ja } \boldsymbol{C} = [C_1, \ldots C_n]^T.$$

Otimme käyttöön merkinnän $e^{Dt} = \mathtt{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$. Ts. määrittelimme diagonaalimatriisin D eksponenttifunktion asettamalla: $e^D = \mathtt{diag}(e^{d_1}, \ldots, e^{d_n})$.
Koska $e^{D0} = I =$ yksikkömatriisi, niin $\boldsymbol{y}(0) = X\boldsymbol{C}$, joten alkuarvotehtävän ratkaisukaava voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\boldsymbol{y}(t) = X e^{Dt} X^{-1}\boldsymbol{y}(0).$$

Tässä ei ole vielä mitään muuta uutta kuin "suggestiivinen" merkintä. Sama vanha ongelma vaanii meitä yhä: Entä silloin, kun ominaisvektoreita ei ole tarpeeksi, ts. matriisi X ei ole kääntyvä?

Tavallisen differentiaaliyhtälön $y' = ay$, $y(0) = y_0$, ratkaisu saadaan eksponenttifunktion avulla muodossa $y(t) = y_0 e^{at}$. Entä jos kylmäverisesti kirjoittaisimme systeemin tapauksessa ratkaisun muotoon $\boldsymbol{y}(t) = e^{At}\boldsymbol{y}_0$. (Matriisi kertaa pystyvektori on kirjoitettava tässä järjestyksessä.) Diagonalisoituvan matriisin tapauksessahan voisimme määritellä $e^{At} = X e^{Dt} X^{-1}$, jolloin tämä kaava toden totta olisi voimassa.

Tarvitaan vain yksi ratkaiseva hyppy tuntemattomaan ... köytenä perusmatriisi

Näin määritelty e^{At} on yhtälösysteemin perusmatriisi josta oli aiemmin ohimennen puhe, ja jota merkittiin $Y(t)$:llä. Nyt lähdetään hakemaan perusmatriisia tuskallisen tietoisina siitä, että sitä ei aina voida rakentaa ominaisvektoreista.

No, jospa meillä nyt olisi sellainen maaginen matriisi $Y(t)$, että $\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{y}_0$

Sijoitetaan tällainen yrite yhtälöön $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, jolloin saadaan $Y'(t)\mathbf{y}_0 = AY(t)\mathbf{y}_0$. Tämä toteutuu, jos matriisille $Y(t)$ pätee $Y'(t) = AY(t)$. Alkuehdosta $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ seuraa lisäksi, että $Y(0) = I =$ yksikkömatriisi.

Yhtälön $Y'(t) = AY(t)$ toteuttavaan matriisiin $Y(t)$ voidaan päätyä monella eri tavalla. Eräs mahdollisuus on etsiä matriisia $Y(t)$ potenssisarjan avulla: kirjoitetaan (formaalisti, kiinnittämättä huomiota suppenemiskysymyksiin)

$$Y(t) = X_0 + tX_1 + t^2 X_2 + t^3 X_3 + \ldots,$$

missä $n \times n$-matriisit $X_0, X_1, \ldots$ eivät riipu ajasta t. Koska $Y(0) = I$, täytyy olla $X_0 = I$. Lisäksi

$$Y'(t) = X_1 + 2tX_2 + 3t^2 X_3 + \ldots,$$

joten sijoittamalla yhtälöön $Y'(t) = AY(t)$ saadaan

$$\begin{aligned} Y'(t) &= X_1 + 2tX_2 + 3t^2X_3 + \cdots = A(I + tX_1 + t^2X_2 + t^3X_3 + \ldots) \\ &= A + tAX_1 + t^2AX_2 + \ldots. \end{aligned}$$

Vertaamalla lausekkeiden t^n (matriisi)kertoimia, nähdään että $X_1 = A,\ 2X_2 = AX_1,\ 3X_3 = AX_2$ jne. Ratkaisemalla saadaan siis $X_1 = A,\ X_2 = \frac{1}{2}A^2,\ X_3 = \frac{1}{3!}A^3$ jne. Matriisin $X(t)$ täytyy siis olla muotoa

$$Y(t) = I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots.$$

Heureka! Tämähän on eksponenttifunktion sarjakehitelmä, jos A on luku. Nythän meillä ei enää ole vaihtoehtoja, vaan määritelmä suorastaan huutaa saada tulla asetetuksi. Koska $At(= tA)$ on $n \times n$-matriisi siinä missä A, on yksinkertaisinta jättää yleisissä tarkasteluissa t pois tai ajatella, että käytämme välillä merkintää $B = At$.

Määritelmä 1. Olkoon B $n \times n$-matriisi. Matriisieksponenttifunktio e^B määritellään sarjakehitelmällä

$$e^B = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots.$$

Ensimmäinen ongelma on se, mitä tämä sarjakehitelmä tarkoittaa. Jos kehitelmä katkaistaan $(k+1)$. termin jälkeen saadaan lauseke

$$S(k) = I + B + \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots + \frac{1}{k!}B^k,$$

joka on määritelty kaikille neliömatriiseille B. Sarjakehitelmän suppeneminen tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että jokainen ylläolevan matriisin alkio $S(k)_{i,j}$ lähestyy lukua $s_{i,j}$, kun $k \to \infty$. Voidaan osoittaa, että näin todella käy kaikille neliömatriiseille, ja siten e^B on hyvin määritelty $n \times n$-matriisi.

Tehtävä:
Osoita, että matriisieksponenttifunktion sarjan suppenee kaikilla neliömatriiseilla B.
Tarvitset kahta asiaa:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ suppenee kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (Peruskurssi 1 tai 2)

2) Yläraja-arviota matriisin B^k alkioille,jotta pääset käyttämään edellä olevaa sarjaa vertailusarjana kullekin alkiosarjalle.
Voit rajoittua matriisiin, jonka alkiot ovat samoja, koska sillekin asian tulee päteä, ja toisaalta mielivaltaisen matriisin tapauksessa saadaan yläraja-arvio korvaamalla kaikki matriisin alkiot itseisrvoltaan suurimmalla. Käsittele ensin matriisia E, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä, yleinen tapaus palautuu tähän helposti.

Kootaan yhteen e^A:n ominaisuuksia.

Lause 1

1. $e^O = I$, jos O on nollamatriisi
2. $e^{tI} = e^t I$, sillä $I^n = I$ kaikilla n
3. jos D on lävistäjämatriisi $\mathtt{diag}([\lambda_1, \dots, \lambda_n])$,
   niin $e^D = \mathtt{diag}([e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}])$. Syy: $D^k = \mathtt{diag}([\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k])$
4. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$ (johdettiin alussa!)
5. Alkuarvotehtävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, yksikäsitteinen ratkaisu on $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0$
6. Differentiaaliyhtälöryhmän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ yleinen ratkaisu on muotoa $\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{c}$, missä $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T$ on vapaista parametreista $c_1, \dots, c_n$ muodostettu vektori
7. $e^{A+B} = e^A e^B$, jos $AB = BA$, mutta ei yleensä muulloin
8. e^A on aina kääntyvä ja $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Tod: Kohdat 1,2,3 ovat varsin selviä.
Kohdan 4. tod. myös suoraan derivoimalla: [EN] Lause 2.2 s. 6.
5 ja 6 seuraavat suoraan dervoimiskaavasta 4. **Huom!** Ratkaisun yksikäsitteisyys voidaan todistaa samantien, tarvitsematta nojautua yleiseen ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseeseen. (Kts. [EN] Lause 2.2)
Kohta 7 voidaan todistaa aivan kuten sarjojen kertominen reaaliluvuilla ([TE] Lause 4.20).
Vaihtoehtoinen todistus kohtaan 7: Funktio $\boldsymbol{y(t)} = e^{(A+B)t}\boldsymbol{y_0}$ on alkuarvotehtävän (lyh. AA-tehtävän) $\boldsymbol{y'} = (A+B)\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y(0)} = \boldsymbol{y_0}$ 1-käs. ratkaisu.

Toisaalta $\boldsymbol{z}(t) = e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0}$ on saman AA-tehtävän ratkaisu, sillä

$\boldsymbol{z'}(t) = Ae^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} + e^{At}Be^{Bt}\boldsymbol{y_0}$.

Koska $AB = BA$, niin $e^{At}B = Be^{At}$, kuten nähdään kertomalla e^{At}:n sarjakehitelmä vasemmalta ja oikealta B:llä. (Kysymys palautuu siihen, että $AB = BA \implies A^k B = BA^k$.)

Niinpä $\boldsymbol{z'}(t) = (A+B)e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} = (A+B)\boldsymbol{z}(t)$.
Lisäksi $\boldsymbol{z}(0) = e^{A0}e^{B0}\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{y_0}$.

Yksikäsitteisyyslauseen perusteella $e^{(A+B)t}\boldsymbol{y_0} = e^{At}e^{Bt}\boldsymbol{y_0} \quad \forall \boldsymbol{y_0} \in \mathbb{R}^n$.

Valitsemalla $\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{e}_k, k = 1 \ldots n$, missä $\boldsymbol{e}_k$ on $\mathbb{R}^n$:n $k:s$ yksikkövektori, nähdään kummankin matriisin k:s sarake samaksi kaikilla k:n arvoilla, eli matriisit $e^{(A+B)t}$ ja $e^{At}e^{Bt}$ ovat samoja. $\boxed{7}$

Kohta 8: A ja $-A$ kommutoivat, joten $I = E^O = e^{(A-A)} = e^A e^{-A}$.

□

Huom! Tarkkaavainen lukija huomaa kehäpäättelyn aineksia, jos sattuu lukemaan myös [EN]-prujusta yksikäsitteisyystodistuksen. Siinä tarvitaan kohdan 8 tulosta, joka todistetaan kohdan 7 avulla. No, [EN]/[TE]-prujuissa ei ole kehäpäättelyä, koska siellä todistetaan ominaisuus 7 eri tavalla. Yllä oleva "puhdistuu" vetoamalla yleiseen (lineaaristen systeemien) olemassaolo- ja yksikäs. lauseeseen.

Miten e^{At} lasketaan?

Diagonalisoituvat matriisit:

Tätä tapausta voidaan pitää enemmänkin vanhan asian käärimisenä hiukan värikkäämpään karamellipaperiin. Toki ratkaisukaava saadaan yhtenäiseen muotoon.
Jos $A = XDX^{-1}$, missä A:n ominaisarvot ovat matriisin D lävistäjällä ja ominaisvektorit matriisin X sarakkeina, niin ensinnäkin

$$A^k = (XDX^{-1})(XDX^{-1})\ldots(XDX^{-1})(XDX^{-1}) = XD^kX^{-1},$$

sillä välissä olevat termit $X^{-1}X$ supistuvat pois! Tämän perusteella

$$e^{At} = I + tA + \frac{1}{2}t^2A^2 + \cdots = X(I + tD + \frac{1}{2}t^2D^2 + \ldots)X^{-1} = Xe^{tD}X^{-1}.$$

Kuten yllä todettiin, $e^{tD} = \texttt{diag}([e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}])$ ja niinpä diagonalisoituvan matriisin kaava e^{At}:lle on juuri sama, jota alkujohdattelussa ehdotettiin.
Erityisesti on huomattava, että vaikka reaalisen A:n ominaisarvot ja
-vektorit olisivat kompleksisia, niin lopputulos on tällöinkin reaalinen, koska kaikki sarjakehitelmän potenssit A^k ovat reaalisia matriiseja. Reaalinen ratkaisukanta saadaan siten suoraan myös kompleksitapauksessa.

2×2**-käänteismatriisi**

Koska esimerkeissä tulee tällaisen laskeminen monta kertaa vastaan, annetaan valmis kaava:
Jos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, niin $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (Päälävistäjän alkiot vaihdetaan, sivulävistäjän miinustetaan, jaetaan $\det(A)$:lla.)

Esimerkki 2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tällöin $A = XDX^{-1}$, missä

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

tämä eli eräs aikaisempi esimerkki diagonalisoinnista. Nyt $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joten

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. Tällöin ominaisarvot ovat $1 \pm 3i$ ja niitä vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x}^{(1)} = [1, i]^T$ ja $\mathbf{x}^{(2)} = [1, -i]^T$. Edelleen on voimassa $A = XDX^{-1}$, jossa

$$D = \begin{bmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Nyt $X^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix}$ ja siis

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+3i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-3i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -i/2 \\ 1/2 & i/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{1}{2}e^{(1-3i)t} & \frac{-i}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{i}{2}e^{(1-3i)t} \\ \frac{i}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{-i}{2}e^{(1-3i)t} & \frac{1}{2}e^{(1+3i)t} + \frac{1}{2}e^{(1-3i)t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) & e^t\sin(3t) \\ -e^t\sin(3t) & e^t\cos(3t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sievennysten jälkeen.

Kuten huomaamme, laskujen välivaiheet saattavat näyttää hieman hankalilta, mutta etuna on joka tapauksessa se, että alkuarvotehtävien ratkaisut saadaan heti reaalimuodossa ja yhdenmukaisella tavalla. (Tällaisissa symbolisissa matriisioperaatioissa symbolilaskentaohjelma (Maple, Mathematica) on suureksi avuksi.)

Esimerkki 4. Ratkaise edellisiin matriiseihin liittyvät alkuarvotehtävät $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [1,2]^T$.

Esimerkissä 2 ratkaisu on

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^t \\ 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

eli $y_1(t) = 2e^{2t} - e^t$ ja $y_2(t) = 2e^{2t}$.

Esimerkissä 3 ratkaisu on muotoa

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) & e^t\sin(3t) \\ -e^t\sin(3t) & e^t\cos(3t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos(3t) + 2e^t\sin(3t) \\ 2e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t) \end{bmatrix},$$

eli $y_1(t) = e^t\cos(3t) + 2e^t\sin(3t)$ ja $y_2(t) = 2e^t\cos(3t) - e^t\sin(3t)$.

Matriisit, jotka eivät diagonalisoidu:

Nyt päästään varsinaisesti uuteen asiaan. Toki olemme oppineet yhden tapauksen hoitamaan, sen, jossa $2\times2-$matriisilla on kaksinkertainen ominaisarvo ja vain yksi ominaisvektori. Nyt katsotaan, mitä voidaan yleisesti sanoa. Kyse on siis siitä, minkälaisia tapoja meillä on e^{At}:n laskemiseen. Toki voidaan käyttää määritelmän sarjakehitelmää, joissakin tapauksissa se toimiikin, jos voidaan tunnistaa alkiosarjoista tunnettuja sarjakehitelmiä. Numeerisesti laskettaessa sarjakehitelmän käyttö on yleensä hyvin tehotonta.

Esimerkki: Diagonalisoitumaton matriisi, e^{At} kahdella tavalla

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jolla on kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Kun yritämme laskea ominaisvektoreita, saamme yhtälöparin $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, josta saadaan ominaissuora: $y_1-akseli$, joten kaksi LRT ominaisvektoria jää haaveeksi.

Tässä tapauksessa saadaan matriisin potensseille helposti kaava: $A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joten

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t^2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}t^3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots & t + t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \dots \\ 0 & 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Alkuarvotehtävän $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(0) = [1,2]^T$ ratkaisu on tässä tapauksessa

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t + 2te^t \\ 2e^t \end{bmatrix}.$$

Toinen tapa laskea e^{tA} yllä olevassa esimerkissä on kirjoittaa $A = I + B$, missä siis $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja käyttää kaavaa $e^{tA} = e^{tI}e^{tB}$, joka on voimassa yhtälön $IB = BI$ perusteella. Jos lasketaan matriisin B potensseja, havaitaan, että

$B^2 = \mathbf{0}$, B on ns. nilpotentti matriisi, tässä tapauksessa sarjakehitelmä katkeaa jo 1. asteen termin jälkeen ja homma on harvinaisen helppo.

$e^{tB} = I + tB = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, joka siis kerrotaan `diag`$([e^t, e^t])$:llä. Tämähän tarkoittaa kummankin rivin kertomista samalla e^t:llä, joten sopusointu vallitsee edellisen tavan kanssa.

Yleinen tapaus voidaan selvittää periaatteessa samalla tavalla, mutta diagonalisoinnin sijasta on käytettävä ns. Jordan-hajotelmaa, joka muodostetaan ns. yleistettyjen ominaisvektoreiden avulla. Yllä oleva esimerkki liittyykin yksinkertaisimman Jordan-lohkon matriisieksponenttifunktion laskemiseen, ja vastaava päättely yleistyy suuremmille matriiseille.

Matlabin avulla matriisieksponenttifunktio e^{tA} saadaan tekemällä ensin t:stää symbolinen muuttuja käskyllä `syms t` ja kirjoittamalla sitten `expm(A*t)`. Tämä edellyttää "Symbolic toolboxin" läsnäoloa, jolloin symbolinen osuus hoituu itse asiassa Maple-ohjelman avulla.

Matlabin `expm` on hyvä numeerinen toteutus matriisieksponenttifunktiolle. Tässä yhteydessä kannattaa mainita jo klassikon maineen alalla saavuttanut julkaisu `[19D]` yllä.

Epähomogeenisen yhtälöryhmän ratkaiseminen. Seuraavassa esitetään, kuinka myös epähomogeeninen differentiaaliyhtälöryhmä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ voidaan ratkaista matriisieksponenttifunktion avulla. Tässä A on $n \times n$-vakiomatriisi ja $\mathbf{g}(t) = [g_1(t), \ldots, g_n(t)]^T$ on pystyvektori.

Kirjoitetaan yhtälö aluksi muotoon $\mathbf{y}' - A\mathbf{y} = \mathbf{g}(t)$ ja kerrotaan sen jälkeen molemmat puolet vasemmalta matriisilla e^{-tA}, jolloin saadaan yhtälö $e^{-tA}\mathbf{y}' - e^{-tA}A\mathbf{y} = e^{-tA}\mathbf{g}(t)$. Koska matriiseille on voimassa tulon derivoimissääntö $(XY)' = X'Y + XY'$ (syy: $(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik}y_{kj}$, mistä väite seuraa tavallisen tulon derivoimissäännön avulla), niin yhtälö tulee muotoon

$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}\mathbf{y}) = e^{-tA}\mathbf{g}(t).$$

Matriiseja derivoidaan alkio kerrallaan, joten niitä voidaan myös integroida alkioittain. Näin ollen saamme

$$e^{-tA}\mathbf{y} = \int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\ dt + \mathbf{c},$$

missä integrointi kohdistuu erikseen pystyvektorin $e^{-tA}\mathbf{g}(t)$ jokaiseen komponenttiin ja $\mathbf{c} = [c_1, \ldots, c_n]^T$ on integroimisvakioista koostuva pystyvektori. Matriisin e^{-tA} käänteismatriisi on e^{tA}, joten ratkaisuksi saadaan

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\ dt + e^{tA}\mathbf{c}.$$

Tässä termi $e^{tA}\mathbf{c}$ on vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu ja lauseke $e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\ dt$ on puolestaan alkuperäisen yhtälön yksittäisratkaisu. Matriisieksponenttifunktion avulla yksittäisratkaisulle saadaan siis eksplisiittinen lauseke. Yleensä saattaa kuitenkin olla helpompi hakea yksittäisratkaisua sopivan yritteen avulla, sillä yo. kaava johtaa usein osittaisintegrointeihin.

Jos halutaan ratkaista yhtälöryhmään $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ liittyvä alkuarvotehtävä $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, niin voidaan käyttää määrättyä integraalia välillä $[0, t]$. Koska

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{-sA}\mathbf{y}(s))\ ds = e^{-tA}\mathbf{y}(t) - e^{O}\mathbf{y}(0) = e^{-tA}\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0,$$

niin alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan

$$\mathbf{y}(t) = e^{tA}\mathbf{y}_0 + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\mathbf{g}(s)\ ds.$$

Esimerkki 5. Ratkaistaan ryhmä $\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$, missä A on esimerkin 2 matriisi ja $\mathbf{g}(t) = [1, e^t]^T$. Aikaisemmin laskettiin

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t} - e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

joten

$$e^{-tA} = e^{(-t)A} = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Tällöin

$$e^{-tA}\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} - e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

joten

$$\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\;dt = \begin{bmatrix} \int (2e^{-t}-1)\;dt \\ \int e^{-t}\;dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t}-t \\ -e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ryhmän yksittäisratkaisu on siis muotoa

$$\mathbf{y}_0(t) = e^{tA}\int e^{-tA}\mathbf{g}(t)\;dt = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2e^{-t}-t \\ -e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -te^t-e^t-1 \\ -e^t \end{bmatrix},$$

jonka avulla yleiseksi ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} y_1(t) = (c_1-c_2)e^t + c_2e^{2t} - te^t - e^t - 1 \\ y_2(t) = c_2e^{2t} - e^t. \end{cases}$$

Vastaavalla tavalla saadaan esimerkiksi alkuarvotehtävän $\mathbf{y}(0) = [1,2]^T$ ratkaisuksi

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t & e^{2t}-e^t \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \int_0^t (2e^{-s}-1)\;ds \\ \int_0^t e^{-s}\;ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{2t}-te^t-e^t-1 \\ 3e^{2t}-e^t \end{bmatrix}.$$

Stabiilisuus. Matriisieksponenttifunktion avulla voidaan tutkia myös tasapainoratkaisujen stabiilisuutta ja tyyppiä. Diagonalisoituville matriiseille $e^{tA} = Xe^{tD}X^{-1}$, joten tyyppi ja stabiilisuus selviävät suoraan lävistäjämatriisin e^{tD} käyttäytymistä tutkimalla.