Esim Degeneraatio, ei ominais-vektorikantaa. KRE^9 4.3 Exa 6 s. 144–145

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}, \qquad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 1$$

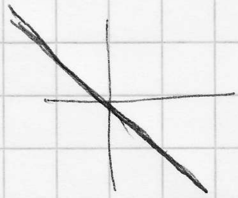
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

$\lambda = 3$, kaksinkertainen om. arvo

Om. vekt: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$; $x_1 + x_2 = 0$,

$x_2 = -x_1$. Siis vain vektorin

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



virittämä ominaisuora.

$$\vec{y}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Mistä saadaan toinen LRT ratk.?

Esitetään tässä menetelmä, joka ei ole yleistyskelpoinen, (vrt. KRE^9 sec. 4.3 Exa 6 s. 144–145)

(No basis of eigenvectors ... Degenerate node

Sijoitetaan yrite

$$\vec{y}_2 = \underbrace{t e^{\lambda t} \vec{x}}_{\text{tämä termi yksin ei riitä!}} + e^{\lambda t} \vec{u}$$

, jossa $\vec{u}$ on määrättävä vektori

$$\vec{y}_2{}' = e^{\lambda t} \vec{x} + \cancel{\lambda t e^{\lambda t} \vec{x}} + \lambda e^{\lambda t} \vec{u}$$

|| VAATIMUS

$$A \vec{y}_2 = \cancel{t e^{\lambda t} \underbrace{A \vec{x}}_{\lambda \vec{x}}} + e^{\lambda t} A \vec{u}$$

jaet. $e^{\lambda t}$:llä

$$\Rightarrow \quad \vec{x} + \lambda \vec{u} = A \vec{u}, \text{ ts.}$$

$$(A - \lambda I) \vec{u} = \vec{x}$$

Tässä esimerkissä: $\lambda = 3$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$(A - 3I) \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 1 \\ (-u_1 - u_2 = -1) \end{cases} \qquad u_1 + u_2 = 1$$

Val. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x}$, $\vec{u}$ LRT

Saadaan ratkaisukanta:

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda t} \vec{x}, \quad \vec{y}_2 = t e^{\lambda t} \vec{x} + e^{\lambda t} \vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t)$$

$$= c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \left(t e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$