Alkeismatriisit

Saadaan yksikkömatriisista

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$ (>> I = eye(n,n);)

kolmenlaisilla operaatioilla:

Tyyppi 1) I:n 2 riviä vaihdetaan

Esim

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vaihdettiin rivit 2 ja 3

```
>> E = eye(4,4)
>> E([2,3],:) = E([3,2],:)
```

$$E_1 \underset{(4\times r)}{A} \qquad E_1 \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{bmatrix}_{j=1..r} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{3j} \\ a_{2j} \\ a_{4j} \end{bmatrix}_{j=1..r} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{a}_{1\cdot} \\ \vec{a}_{3\cdot} \\ \vec{a}_{2\cdot} \\ \vec{a}_{4\cdot} \end{bmatrix}$$ (>> [A(1,:); A(3,:); A(2,:); A(4,:)])

Erityisesti, jos valitaan $A = E_1$, niin $E_1 E_1 = I$, joten $E_1^{-1} = E_1$.

Tyyppi 2) I:n jokin rivi kerrotaan luvulla $d \neq 0$.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$E_2 A$ kertoo A:n 3. rivin d:llä.

yleisesti $D = \begin{bmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_n \end{bmatrix}$ $(= \mathrm{diag}([d_1, \ldots, d_n]))$

$$D \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}_{j=1..p} = \begin{bmatrix} d_1 a_{1j} \\ d_2 a_{2j} \\ \vdots \\ d_n a_{nj} \end{bmatrix}_{j=1..p} = \begin{bmatrix} d_1 \vec{a}_{1\cdot} \\ d_2 \vec{a}_{2\cdot} \\ \vdots \\ d_n \vec{a}_{n\cdot} \end{bmatrix}$$

$$\left(AD = \left[d_1 \vec{a}_{\cdot 1} \,\middle|\, d_2 \vec{a}_{\cdot 2} \ldots \,\middle|\, d_m \vec{a}_{\cdot m} \right] \right)$$

Vasemmalta kerrottaessa kerrotaan rivit, oikealta kerrottaessa sarakkeet d_i-luvuilla.

Tyyppi 3

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = E_3 \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ 3a_{2j} + a_{3j} \end{bmatrix}_j$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{a}_{1\cdot} \\ \vec{a}_{2\cdot} \\ 3\vec{a}_{2\cdot} + \vec{a}_{3\cdot} \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Rivi, jota muutetaan TÄSSÄ 3

rivi, joka kerr. TÄSSÄ 2

Alkeismatriisien käänteismatriisit

LAUSE Olk. E_k tyyppiä k oleva alkeismatriisi, $k = 1, 2, 3$.
Tällöin $\exists\, E_k^{-1}$ ja

(1) $E_1^{-1} = E_1$.

(2) Jos $E_2 = \mathrm{diag}([1, \ldots, c, 1, \ldots 1])$, niin

$$E_2^{-1} = \mathrm{diag}([1, \ldots, c^{-1}, 1, \ldots, 1]).$$

(3) Jos E_3 on alla oleva matriisi, missä $-c$:n paikalla on c, niin

$$E_3^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ddots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & -c & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$

Tod (1) Olkoon E_1 saatu I:stä vaihtamalla rivit i ja k, esim:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow I(3,:) & k=3 \\ \leftarrow I(2,:) & i=2 \end{array}$$

$E_1 A$ vaihtaa A:n rivit i ja k, joten $E_1 E_1$ vaihtaa E_1:n rivit i ja k, jolloin palataan takaisin matriisiin I.

Siis $E_1 E_1 = I$, eli $E_1^{-1} = E_1$.

(2) Edellä samoista seuraa:

$$\mathrm{diag}([d_1, \dots, d_n])\,\mathrm{diag}([c_1 \dots, c_n])$$

$$= \mathrm{diag}([c_1 d_1, \dots, c_n d_n]).$$

Siis jos $d_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, niin

$$\mathrm{diag}([d_1, \dots, d_n])^{-1} = \mathrm{diag}([d_1^{-1}, \dots, d_n^{-1}]),$$

erit. $(\mathrm{diag}([1, \dots, \underset{c \neq 0}{c}, 1, \dots, 1]))^{-1} =$

$$= \mathrm{diag}([1, \dots, c^{-1} \dots 1]).$$

(3) $E_3 A$ suorittaa rivioperaation

$$A(j,:) = cA(i,:) + A(j,:)$$

Jos otetaan A = edellä E_3^{-1}:llä merkitty matriisi, niin rivioperaation vaikutus on $c - c = 0$, joten tulo $= I$. $\square$

Esim.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \qquad \text{LU-hajotelma?}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} & -2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siis $E_3 E_2 E_1 A = U$.

$$\Rightarrow A = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}}_{L} U = LU,$$

missä

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tämä seuraa heti ajattelemalla tulo $E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$ peräkkäisinä rivioperaatioina.

Tästä saadaan yleinen malli LU-hajotelmalle tapauksessa, jossa ei tarvita rivinvaihtoja.

Pe 7.11.

Esim LU-hajotelma, kun rivejä vaihdetaan

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Valitaan (vastoin numeriikan vaatimusta) 3. rivi tukiriviksi

$$\sim \begin{array}{r} 3. \\ 2. \\ 1. \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad -2 \quad -3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \sim \begin{array}{r} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad 4$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{U} \begin{array}{l} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3. \\ 1. \\ 2. \end{array} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehdään tälle LU, U on jo tehty, L:ssä seurattava rivinvaihtoja (tai lasketaan uudestaan)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad -2 \quad -3 \qquad \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad 4$$

$$\sim \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{U} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ +2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Esim. Ratkaise yhtälö $A\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$,

kun $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Yleisesti: Ol: $PA = LU$.

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff PA\vec{x} = P\vec{b}$$

$$\iff LU\vec{x} = P\vec{b}$$

$$P = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{array} \qquad P\vec{b} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\vec{y} = P\vec{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 10 \end{cases}$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Ratk: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$-5x_3 = 10$; $x_3 = -2$

$-x_2 - x_3 = 1$; $x_2 = -x_3 - 1 = 1$

$2x_1 = x_2 - x_3 - 1 = + \cancel{1 + 2 - 1 = -} 2$

$= 1 + 2 - 1 = 2$

$\Rightarrow x_1 = 1$

Matlab : [L, U, P] = lu(A) .

<u>Huom:</u> En suosittele kutsua:

[L, U] = lu(A) , sillä

se tekee L:stä "psykologisesti ala-kolmiomatriisin" eikä sovi yhteen sen kanssa, mitä tässä olemme opetelleet.

Oma, yksinkertaisempi Matlab-koodi LU-hajotelmalle:

http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/matlab/LUplain.m