Ominaisarvojen laskentamenetelmiä

Ominaisarvojen ja -vektorien laskenta tarkasti on yleen harvoin mahdollista.

Ominaisarvojen jakautuminen

Diagonaalimatriisin ominaisarvot ovat diagonaalialkiot.
Entä jos matriisi on "lävistäjävaltainen",

esim.
$$A = \begin{bmatrix} 100 & -3 & -1 \\ 3 & 200 & -4 \\ -2 & 1 & 300 \end{bmatrix}$$

Onko $\lambda_1 \simeq 100$, $\lambda_2 \simeq 200$, $\lambda_3 \simeq 300$

Kyllä on!

Merk.: $B(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r \}$,
kompleksitason z_0-keskinen, r-säteinen suljettu kiekko.

Lause 1 [Gerschgorin] Olkoon $A(n \times n)$, ja merkitään $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, $1 \leq i \leq n$,

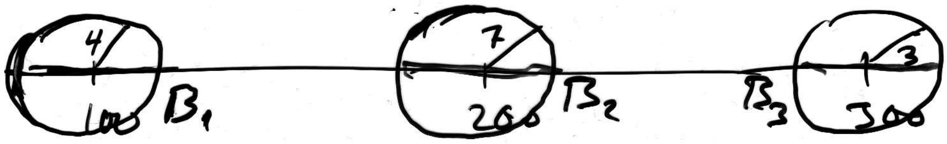
ts. r_i on rivin i muiden kuin diagonaali-alkioiden itseisarvojen summa.
Jokainen ominaisarvo λ sijaitsee jossain kiekossa $B(a_{ii}, r_i)$.

Katsotaan ensin esimerkkiä:

$$r_1 = |-3| + |-1| = 4, \quad a_{11} = 100$$

$$r_2 = 3 + 4 = 7, \quad a_{22} = 200$$

$$r_3 = 2 + 1 = 3, \quad a_{33} = 300$$



G:n lauseesta seuraa, että jokainen λ kuuluu johonkin kiekkoon, mutta voisiko esim. $\lambda_1, \lambda_2 \in B_1$ jolloin B_2 tai B_3 ei sisältäisi yhtään ominaisarvoa?

Geršgorinin "terästetty" muoto

> Jos p G:n kiekkoa muodostaa joukon S, jota mikään muu $(n-p)$ kiekkoa ei leikkaa, niin S sisältää tasan p ominaisarvoa (laskettuna algebrallisen kertalukunsa mukaisesti).

Tämän perustella: $\lambda_i \in B_i$, $i = 1..3$, joten $|\lambda_1 - 100| \le 4$, $|\lambda_2 - 200| \le 7$,

$$|\lambda_3 - 300| \le 3.$$

Jos A olisi symmetrinen, tiedettäisiin lisäksi, että $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Geršgorinin lauseen perusmuodon tod:

Osoitetaan: Jos λ on A:n ominaisarvo, niin $\exists i$ s.e. $|a_{ii} - \lambda| \le r_i$.

Olkoon λ ominaisarvo ja $\vec{x}$ vastaava ominaisvektori:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Olkoon x_k itseisarvoltaan suurin $\vec{x}$:n koordinaatti: $|x_k| \ge |x_i|$, $i = 1 \ldots n$

Otetaan esiin tämä k:s rivi:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = \lambda x_k$$

$$\Rightarrow (a_{kk} - \lambda)x_k = -a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \underset{\substack{\uparrow \\ -a_{kk}x_k \text{ puuttuu}}}{\ldots} - a_{kn}x_n$$

$\Rightarrow$ (jaetaan $|x_k|$:lla ja käytetään kolmioepäyhtälöä):

$$|a_{kk} - \lambda| \le |a_{k1}| \underbrace{\left|\frac{x_1}{x_k}\right|}_{\le 1} + \underset{\substack{\uparrow \\ a_{kk}\text{-termi puuttuu}}}{\ldots} + |a_{kn}| \underbrace{\left|\frac{x_n}{x_k}\right|}_{\le 1}$$

$$\le \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| = r_k. \quad \square$$

Todistuksen juoni vielä kerran:

1. Ominaisarvon/-vektorin määritelmäyhtälö
2. Ominaisvektorin its. arvoltaan suurin $|x_k|$
3. Sillä k:lle valitaan rivi (k), jossa arvioidaan kolmioey:llä.

[Siis λ on sen a_{kk}:n läheisyydessä, jolla $|x_k|$ suurin.]

Joitakin Geršgorinin seurauksia:

Matriisi A on aidosti <u>lävistäjävaltainen</u> "strictly diagonally dominant", jos

$$|a_{ii}| > r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

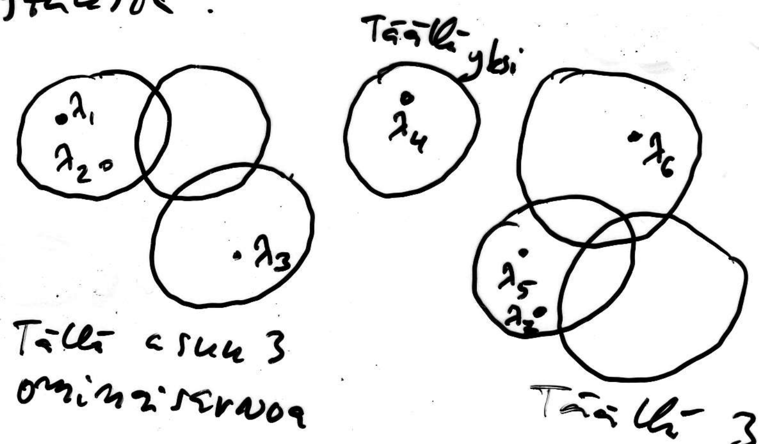
Tällainen matriisi on aina kääntyvä, sillä mikään Geršgorinin kiekko ei sisällä 0:aa, joten 0 ei voi olla ominaisarvo

<u>Terästetty Geršgorin</u>:

Todistusta ei esitetä KRE-kirjassa eikä tässä.

Havainnollistuksia:

<u>yleisesti</u>:



<u>Erityisesti</u>, jos kiekot ovat pistevieraita, niin jokaisessa on tasan yksi ominaisarvo.