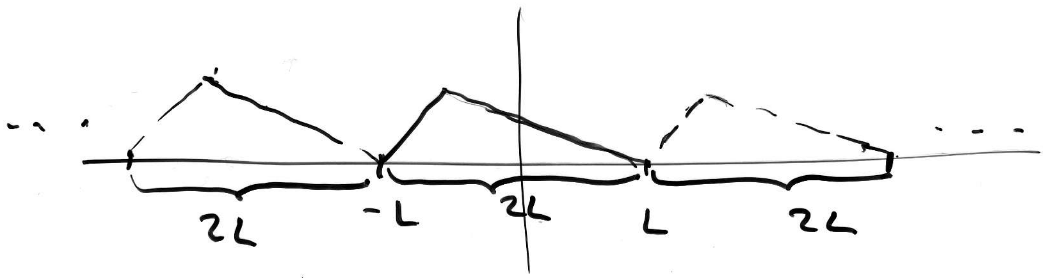
9.12.08

Pikainen katsaus Fourier-sarjoihin

Tarkemmin: KRE: Fourier Series
http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/06/L/fouriersarjat.pdf
(Linkki .../L/Luento1-36.html - tiedostossa)

Olkoon $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ paloittain jatk. derivoituva.

f voidaan tarvittaessa ajatella jatketuksi $2L$-jaksoisena koko $\mathbb{R}$:ään.



Jokainen muotoa

$$(FS) \quad a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

oleva "trigonometrinen polynomi" on $2L$-jaksoinen. Myös jos $N = \infty$ ja sarja suppenee.

<u>Käänteen</u>: Jokainen $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ pal. jatk. der. voidaan esittää muodossa (FS) ($N = \infty$ yleensä).

"Fourier-kertoimille" a_n, b_n void. johtaa kaavat aivan vastaavaan tapaan kuin ortogonaalisen kannan suhteen esitetyille vektoreille:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Euler 1777 (kai)

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1$$

Jos f pariton ($f(-x) = -f(x)$), niin $a_n = 0$. Tällöin kyseessä on $\boxed{\text{sinisarja}}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},$$

b_n saadaan helpommin kaavasta:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Jos f parillinen ($f(-x) = f(x)$), niin $b_n = 0$. Tällöin kyseessä on $\boxed{\text{kosinisarja}}$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

a_n saadaan helpommin kaavasta:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1.$$

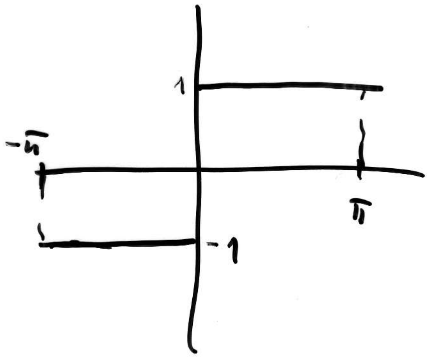
Esim. [Pruju 2.1, KRE]

Muodosta funktion $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$

Fourier (sini) sarja

Periodi

$L = \pi$



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \sin nx \, dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\Big/_0^{\pi} \cos nx = \frac{2}{n\pi}\big(1 - \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}\big)$$

$$(b_n) = \frac{4}{\pi}\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$$

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Kts. ../matlab/html/demokantti*.html

Näillä eväillä pärjätään hyvin.

Kun käsitellään pelkästään Dirichlet-tyyppisiä (0-arvo-) reunaehtoja, tarvitaan vain sinisarjaa.