L7 ti 18.11.08

Differentiaaliyhtälösysteemit

- Analyyttiset menetelmät
- Kvalitatiiviset —"—
- Numeeriset —"—

Luokittelu

- Lineaariset
- —"— vakiokertoimiset
- Epälineaariset

Pikakertaus: $\boxed{\text{Lineaariset vakiokertoimiset 2.kl. yhtälöt}}$

[KRE 2.2 Homog. Linear ODEs with constant coeff.]

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (HY)$$

$$y'' + ay' + by = F(t) \quad (EHY)$$

HY:n yleinen: Etsitään 2 LRT ratkaisua $y_1(t)$ ja $y_2(t)$. Yleinen ratk:

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

Alkuehdot: $y(t_0) = a$, $y'(t_0) = b$.

Näistä ratkaistaan kertoimet C_1, C_2.

[Samoten alkuarvotehtäviä (AA)-tehtäviksi]

EHY:n yleinen:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),$$

missä $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ on (HY):n yleinen ja y_p on jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa jollain konstilla keksitty ratkaisu)

EHY:n (AA)-tehtävä ratkaistaan yleisesti ratkaisusta vastaavasti määräämällä alkuehtojen perusteella vakiot C_1 ja C_2.

<u>(HY):n ratkaiseminen</u>

<u>Yritä</u>: $y(t) = e^{\lambda t}$, $y'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

Sij. (HY):öön $\Rightarrow$

$$\underbrace{(\lambda^2 + a\lambda + b)}_{p(\lambda)\ \text{karakteristinen polynomi}} e^{\lambda t} = 0$$

(HY) toteutuu, jos $p(\lambda) = 0$.

Eri tapaukset riippuen juurien tyypistä.

(1) $a^2 - 4b > 0 \Rightarrow$ 2 reaalijuurta λ_1, λ_2

(2) $a^2 - 4b = 0 \Rightarrow$ reaalinen kaksoisjuuri λ

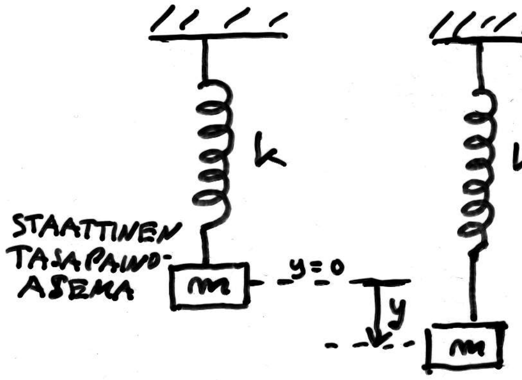
(3) $a^2 - 4b < 0 \Rightarrow$ liittoluvut λ ja $\bar{\lambda}$

<u>Ratk</u>: (1) $C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

(2) $(C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$

(3) $e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t)$

Mallinnus: Massa-jousisysteemit



Hooken laki:

$$F = -ky$$

(Posit. suunta alaspäin)

Vaimentamaton syst.

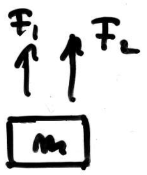
$$my'' = -ky \quad ; \quad y'' + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} y = 0$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \cos \omega_0 t \\ y_2(t) = \sin \omega_0 t \end{cases}$$

Yl. ratk. $y(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$

Vaimennettu syst.

Vaimennus verrannollinen nopeuteen (ja vastakkaissuuntainen)



$F_1 = -ky$ (jousivoima)

$F_2 = -cy'$ (vaimennusvoima)

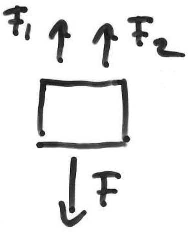
$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$$

(1) Ylivaimennus: $c^2 > 4mk$, reaalijuuret

(2) Kriittinen vaimennus: $c^2 = 4mk$, kaksoisjuuri

(3) Alivaimennus: $c^2 < 4mk$, kompl. juuret

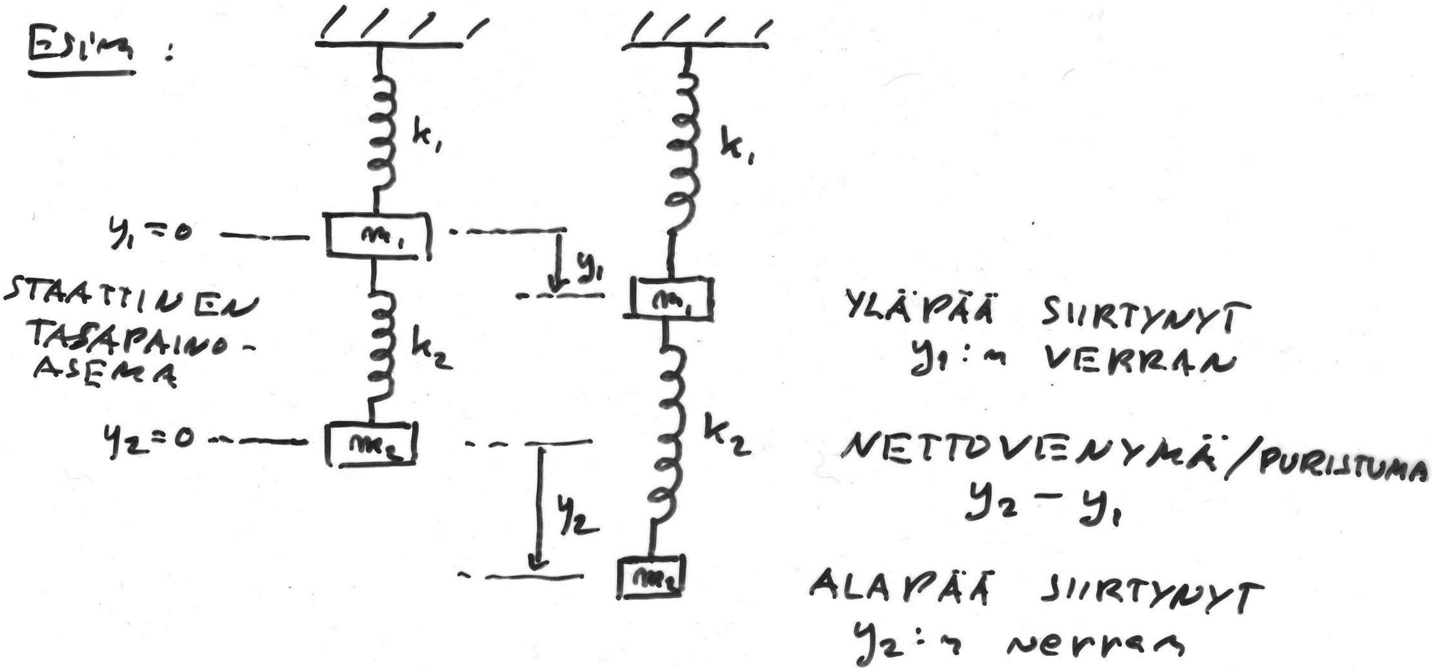
Ulkoinen pakkovoima



$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = F(t) \qquad \text{(EHY)}$$

Entä, jos olisi useita jousia massoineen?

Esim:



m_1:een vaikuttava jousivoima:

$$-k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1)$$

m_2:een vaikuttava jousivoima:

$$-k_2 (y_2 - y_1)$$

Jos vaimennus ja ulkoinen jätetään pois, niin:

$$\begin{cases} m y_1'' = -(k_1 + k_2) y_1 + k_2 y_2 \\ m y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

$$m \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$