Mat-1.1332 Mat. perusk. KP3 - II Rutk. HA

|TENTTI 11.5.2009|

1)

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 48 & 84 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

yläkolmiomatr.: Om. arvot ovat lävistäjän alkiot.

Siis $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = -8$, $\lambda_3 = 4$

[Jos et muista, niin lasku sen paljastaa:

$$\det(A - \lambda I) = (16-\lambda)\begin{vmatrix} -8-\lambda & -24 \\ 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (16-\lambda)(-8-\lambda)(4-\lambda)$$

$= 0 \iff \lambda = 16$ tai $\lambda = -8$ tai $\lambda = 4$]

Lasketaan arvoa $\underline{\lambda = 4}$ vast. om. vekt.:

$$(A - 4I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{0} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 12 & 48 & 84 \\ 0 & -12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_3 = t$ (vapaa)

$-12x_2 - 24x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -2t$

$$\cancel{12}x_1 + \cancel{48}^{4}\underbrace{x_2}_{-2t} + \cancel{84}^{7}\underbrace{x_3}_{t} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = +8t - 7t = t$

Val. $t = 1$: Om. vektori: $\vec{v} = [1, -2, 1]^T$.

(b) A on diagonalisoituva, koska sillä on erilliset ominaisarvot.

2) Lasketaan sisätulot:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -3 + 2 + 1 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 - 8 + 7 = 0$$

Siis ovat ortogonaaliset.

Vektorin $\vec{x}$ esitys kannassa $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$:

$$\vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 + \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|^2}\vec{v}_3$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{x} \cdot \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 18 + 1 - 8 = 11 \\ \|\vec{v}_1\|^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 9 + 1 + 1 = 11 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{x} \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -6 + 2 - 8 = -12 \\ \|\vec{v}_2\|^2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 1 + 4 + 1 = 6 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{x} \cdot \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} = -6 - 4 - 56 = -66 \\ \|\vec{v}_3\|^2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = 1 + 16 + 49 = 66 \end{array}\right.$$

(SATTUIPAS HYVIN!)

$$\vec{x} = \frac{11}{11}\vec{v}_1 - \frac{12}{6}\vec{v}_2 - \frac{66}{66}\vec{v}_3$$

$$= \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

Tarkistus: kerro auki ja katso, tuleeko $\vec{x}$

3) $$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$= 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

Ominaisvektorit:

$\lambda = 2$: $(A - 2I)\vec{x} = \vec{0} \iff$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff -x_1 + 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2 .$$

Val. $x_2 = 1 \implies x_1 = 2$.

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -1$ $(A + I)\vec{x} = \vec{0} \iff$

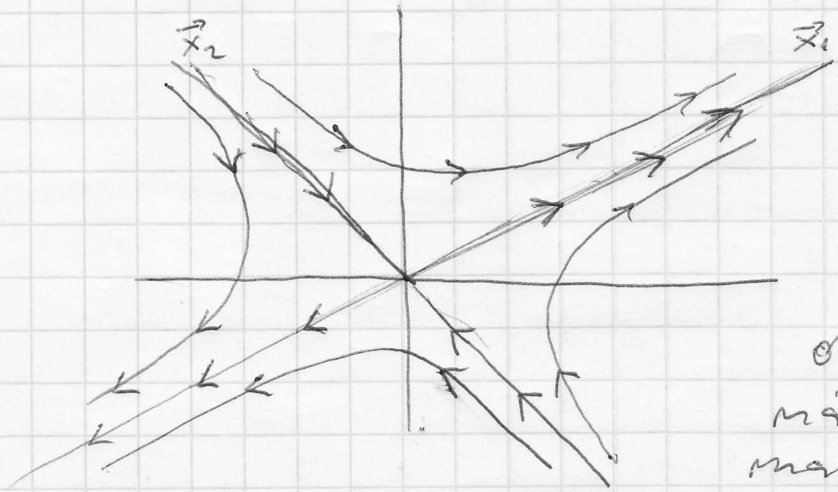
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff x_1 + x_2 = 0 \iff x_1 = -x_2 .$$

Val $x_2 = 1 \implies x_1 = -1$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Yl. ratk: $\vec{y}(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$



Ominaisarvot reaaliset, eri merkkiset $\Rightarrow$ satula.

Nuolien suunnat ominaissuoralla $\vec{x}_1$ nähdään antamalla $c_2 = 0 \Rightarrow$
$\vec{y}(t) = c_1 e^{2t} \vec{x}_1$
(Mennään pitkin ominaissuoraa $\vec{x}_1$, pois origosta.)

Vastaavasti: $c_1 = 0 \Rightarrow \vec{y}(t) = c_2 e^{-t} \vec{x}_2$, mennään $\to 0$ pitkin $\vec{x}_2$:ta, kun $t \nearrow$.

Muut trajektorit kulkevat "hyperbelimäisesti" ominaissuorien rajaamissa neljänneksissä, suuntanuolet nähdään "kuminauhaperiaatteella".

Tarkempi kuva:

http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html

(Valinta: Gallery → Linear)

Huom! Näin pitkiä selityksiä ei tietenkään vaadita. Tämä on silkkaa opetusta.

4) $$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \vec{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200x & -4xy \\ -150y & +2xy \end{bmatrix}$$

(a) KRP: $$\vec{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kysytään sitä, jossa $x \neq 0$ ja $y \neq 0$.

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 200 - 4y = 0 \\ -150 + 2x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \begin{cases} y = 50 \\ x = 75 \end{cases}$$

(b) $$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} 200x_n - 4x_n y_n \\ -150y_n + 2x_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad h = 0.001$$

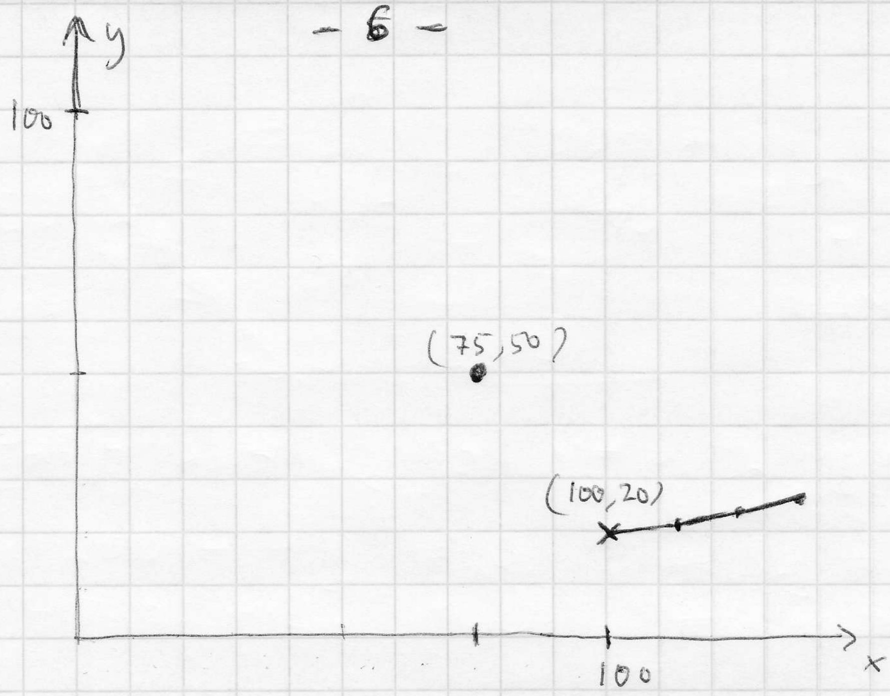
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix} + \cancel{0.001}\begin{bmatrix} \overbrace{\cancel{200 \cdot 100}}^{20} - \overbrace{4 \cdot \cancel{100} \cdot 2\cancel{0}}^{8} \\ \underbrace{-\cancel{150 \cdot 20}}_{-1.5 \cdot 2 = -3} + \underbrace{2 \cdot \cancel{100} \cdot 2\cancel{0}}_{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 112 \\ 21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + 0.001\begin{bmatrix} 200x_1 - 4x_1 y_1 \\ -150y_1 + 2x_1 y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{bmatrix} 125.0 \\ 22.55 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + h\,F\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} 138.7 \\ 24.81 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 100 \\ 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 112 \\ 21 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 125.0 \\ 22.55 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 138.7 \\ 24.81 \end{bmatrix}$$

Trajektoreja voit huvitukseksesi piirrellä pplane:lla

Tehtävä 5

On sama kuin helmikuun tentissä. Toivottavasti opiskelit ratkaisun huolella!