Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Tikanmäki

Tentti 11.5.2009

Laskin sallittu (Siis sellainen, joka kelpuutetaan ylioppilaskirjoituksiin)
Huom! Laskujen välivaiheiden tulee olla näkyvissä. Pelkkä vetoaminen laskimen antamiin tuloksiin ei avaa pistetiliä.

1. (a) Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 48 & 84 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja itseisarvoltaan pienintä ominaisarvoa vastaava(t) ominaisvektori(t).

(b) Millä perusteella matriisi on diagonalisoituva (tai millä perusteella se ei ole)?

2. Osoita, että joukko $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ on $\mathbb{R}^3$:n ortogonaalinen kanta, kun $\boldsymbol{v}_1 = [3, 1, 1]^T$, $\boldsymbol{v}_2 = [-1, 2, 1]^T$, $\boldsymbol{v}_3 = [-1, -4, 7]^T$, ja esitä vektori $\boldsymbol{x} = [6, 1, -8]^T$ näiden kantavektorien lineaarikombinaationa.

3. Määritä differentiaaliyhtälöryhmän $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ yleinen ratkaisu, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Piirrä faasikuvaan ominaisvektorien määräämät suorat trajektorin aikaetenemistä kuvaavine suuntanuolineen, ja hahmottele ylimalkaisesti myös kuhunkin ominaissuorien rajoittamaan tason neljännekseen muutama trajektori suuntanuolineen. (Riittää, että kuva on kvalitatiivisesti oikean näköinen, selviät kyllä ilman laskemista.) Ilmoita faasikuvan tyyppi ja stabiilisuus.

4. Tarkastellaan epälineaarista systeemiä

$$\begin{cases} x' = 200\,x - 4\,x\,y \\ y' = -150\,y + 2\,x\,y, \end{cases}$$

jolla mallinnetaan jänisten ja kettujen muodostamaa yksinkertaista ekosysteemiä.

(a) Määritä systeemin kriittinen piste (KRP), jossa kumpikaan populaatio ei joudu sukupuuton kouriin.

(b) Laske kolme *Eulerin menetelmän* askelta, kun $x(0) = 100, y(0) = 20$ ja askelpituus $h = 0.001$.

(c) Piirrä Eulerin polku $xy-$tasoon (faasitasoon) ja merkitse tasoon myös (a)-kohdan KRP.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 1$ Alkuhetkellä $t = 0$ sauvan lämpötila noudattaa sinimuotoista funktiota:

$$u(x, 0) = f(x) = 100 \sin \pi\, x, \quad 0 < x < 1.$$

Sauvan päät sijoitetaan jääveteen, 0°C, ts. sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$ toteuttaa reunaehdot $u(0, t) = u(1, t) = 0$ kaikkina aikoina t.

Eksplisiittinen iteraatiokaava saa yksinkertaisimman muotonsa

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}),$$

kun valitaan

$$r = \frac{1}{2}, \quad \text{missä } r = \frac{k}{h^2} \quad (h = \Delta x, \quad k = \Delta t).$$

Olkoon $h = 0.2$. Minkä arvon lämpötila saa tällä laskentamenetelmällä ja -hilalla pisteessä $x = 0.2$ ajanhetkellä $t = 0.04$?
Laskentatarkkuudeksi riittää 4 numeroa.

Ohje

Eulerin menetelmä: Tehtävän 4 tarpeisiin annetaan vielä "kevätbonuksena" kaava: Autonomisen $2 \times 2-$systeemin tapauksessa Euler menee näin:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + h\boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix},$$

kun systeeminä on $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.