Mat-1.1332 KP3-ii Tentti 16.12.08 HA

1) Täydennetty matriisi:

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 14 & 10 & 4+b_2 \\ 0 & 7 & 5 & 3+b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3+b_3 \\ 0 & 14 & 10 & 4+b_2 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 3+b_3 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{-2-2b_3+b_2}_{\text{OLTAVA } = 0} \end{bmatrix}$$

Siis (a)-kohdan ehto: $\boxed{b_2 - 2b_3 = 2}$

(b) $b_3 = -2 \implies b_2 = -2$

(Tätä ei edes tarvita)

Sij. $b_3 = -2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Takaisinsijoitus:

x_3 vapaa, $7x_2 + 5x_3 = 1$

$$\implies x_2 = \frac{1}{7}(1 - 5x_3)$$

$$x_1 = 1 - 3x_2 - 4x_3 = \ldots = \frac{1}{7}(1 - 13x_3)$$

Vast. (b):
(Merk. $x_3 = t$)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}(1-13t) \\ x_2 = \frac{1}{7}(1-5t) \\ x_3 = t \end{cases}$$

2) Annettua dataa esitetään funktiolla:

$$p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$$

(a) Ylimääräytyvä yhtälösysteemi:

$p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$, ts.

$$\begin{cases} c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_k x_0^k = y_0 \\ c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_k x_1^k = y_1 \\ \vdots \\ c_0 + c_1 x_n + \dots + c_k x_n^k = y_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^k \\ 1 & x_1 & x_1^2 & & x_1^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^k \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$

Normaaliyhtälöt saadaan kertomalla X^T:llä:

$$X^T X \vec{c} = X^T \vec{y}$$

[$X^T X$ on $(k+1)\times(k+1)$-matriisi.]

(b) PNS-suora $\vec{x} = [2, 3, 4, 5]^T$, $\vec{y} = [0, 4, 10, 16]^T$

$k = 1$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 54 \end{bmatrix}$$

$$X^T \vec{y} = \begin{bmatrix} 30 \\ 132 \end{bmatrix}$$

Normaaliyhtälöt : $X^T X \vec{c} = X^T \vec{y}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 132 \end{bmatrix}$$

(jaet. 2:lla)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 7 & 15 \\ 7 & 27 & 66 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{7}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 15 \\ 0 & 2.5 & 13.5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{13.5}{2.5} = 5.4 \quad , \quad c_0 = \frac{1}{2}(15 - 7c_1) = -11.4$$

$$p(x) = -11.4 + 5.4\,x$$

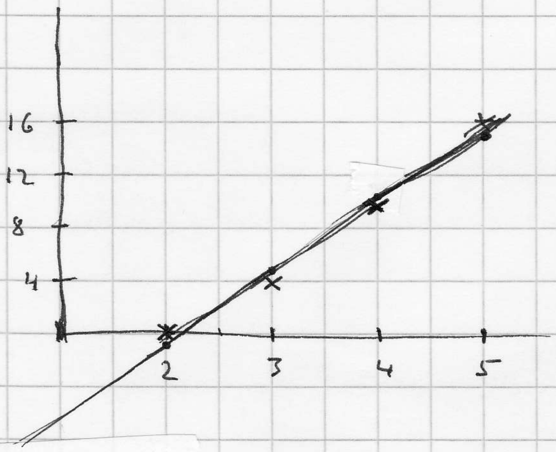
$x = 0$; $p(0) = -11.4$

$x = 5$; $p(5) = 15.6$

$x = 2$; $p(2) = -0.6$

$p(3) = 4.8$

$p(4) = 10.2$



Suoran piirto käsin on hiukan epätarkkaa puuhaa. Se kulkee joka tapauksessa datapisteisiin nähden kuvan osoittamalla tavalla.

3) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ $\quad \vec{y}' = A\vec{y}$

(a) Yleistä ratkaisua varten lasketaan ominaisarvot

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{1}{4}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 2}}$$

Ominaisvektorit :

$\lambda_1 = 1$:
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

Val. $x_1 = 1$; $\quad \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$ Lasku sujuu aivan vastaavasti, mutta voidaan päätellä suoraankin, koska A symmetrinen. Eri om. arvoja vast. om. vekt. ortogonaaliset, joten on oltava (tasossa kun ollaan) :
$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

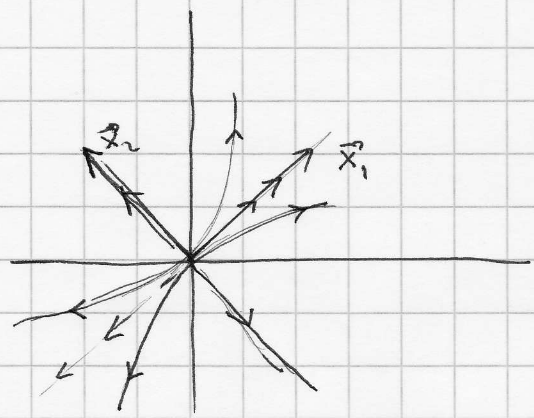
Yl. ratk. : $\quad \bar{y}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) Jos merkitään $e^t = s$, niin
$$\vec{y} = \underbrace{c_1 s}_{z_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{c_2 s^2}_{z_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

KOORDINAATIT OMINAISVEKTORIKANNASSA

$\frac{z_2}{z_1^2} = \frac{c_2}{c_1^2} = K$. Siis ominaisvektori – koordinaatistossa kyse on paraabeleista

$$z_2 = K z_1^2$$



Kyseessä on epästabiili moodi (lähdemoodi).
[Jos kuva ja stabiilisuus on kuitenkin oikein, mutta "moodi" on hukassa, niin ei vähennetä pist.]

4) (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$,

$A^5 = A$, ja sama toistuu.

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \frac{t^4}{4!}I + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{3!} \\ -\frac{t^3}{3!} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^4}{4!} & 0 \\ 0 & \frac{t^4}{4!} \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots, & -t + \frac{t^3}{3!} - \dots \\ t - \frac{t^3}{3!} + \dots, & 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

(b) $y' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$

Ratk.: $\vec{y}(t) = e^{At}\,\vec{y}(0) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$

$= c \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$. Kyseessä $|c|$ - säteisten ympyröiden (0 - keskisten) parvi.

(c) <u>Euler</u>: $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + h\,\vec{f}(t_n, \vec{y}_n)$,

kun on kyseessä DY: $\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y})$.

Nyt $\vec{f}(t,\vec{y}) = A\vec{y}$, joten

$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + hA\vec{y}_n = (I + hA)\,\vec{y}_n$.

$\left(I + hA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -h \\ h & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{bmatrix} \right)$ Ehkä ei käsinlaskussa kannata

$\vec{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + h \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$

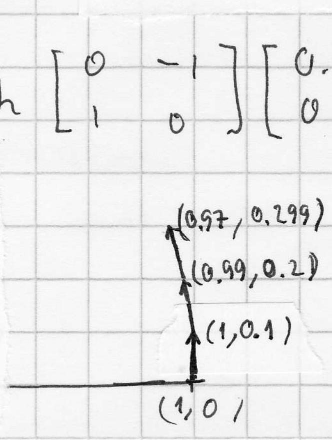
$\Rightarrow \quad \vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ h \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix}}}$

$\vec{y}_2 = \vec{y}_1 + h \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.1 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -0.1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.2 \end{bmatrix}}}$

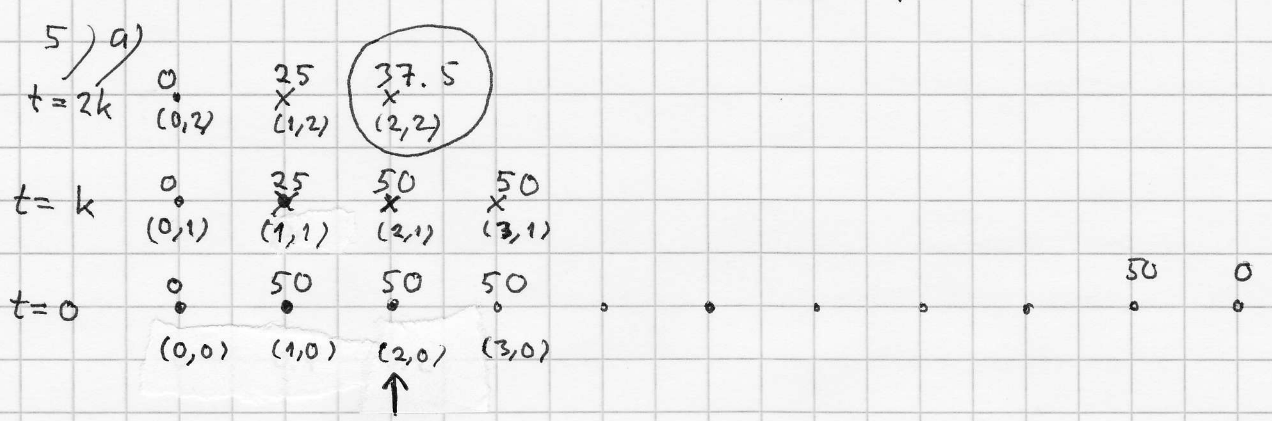
$\vec{y}_3 = \vec{y}_2 + h \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.99 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.99 \end{bmatrix}$

$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0.97 \\ 0.299 \end{bmatrix}}}$



[Lähtee 1-ymp. tang. suuntaan, erkanee vähitellen 1-ympyrästä.]

5) a)



$$u_{1,1} = \frac{1}{2}(u_{0,0} + u_{2,0}) = \frac{1}{2}(0 + 50) = 25$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{2}(u_{1,0} + u_{3,0}) = \frac{1}{2}(50 + 50) = 50$$

$$u_{3,1} = 50 \quad , \ldots$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2}(0 + 50) = 25$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{2}(25 + 50) = 37.5$$

Siis $\underline{\underline{t_1}} = 2k = \underline{0.01}$, tällöin pisteessä $x = 0.2$ saavan lämpötila (tällä laskentamenetelmällä)

$$= \boxed{37.5} \quad (< 40)$$

b) Sarjasta vain 1. termi. Tarvitaan vain kerroin $b_1 = 2\int_0^1 50 \sin \pi x \, dx$

$$= -\frac{100}{\pi} \Big/_0^1 \cos \pi x = \frac{100}{\pi}(1 - \cos \pi) = \frac{200}{\pi}$$

$$u(x, t) \simeq \frac{200}{\pi} \sin \pi x \, e^{-\pi^2 t}$$

$$u(0.2, 0.01) \simeq \boxed{33.9\ ^\circ C}$$