Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

Apiola/Tikanmäki

Tentti 16.12.2008

Laskin sallittu (Siis sellainen, joka kelpuutetaan ylioppilaskirjoituksiin)

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

   (a) Lausu b_2 :n ja b_3 :n avulla ehto, jolla yhtälösysteemillä $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ on ratkaisuja.

   (b) Määritä yllä olevalla ehdolla kaikki yhtälösysteemin ratkaisut, kun $b_3 = -2$.

2. Olkoon annettu datavektorit $\boldsymbol{x} = [x_0, \ldots, x_n]^T$, $\boldsymbol{y} = [y_0, \ldots, y_n]^T$. Tehtävänä on sovittaa dataan astetta $k < n$ oleva polynomi $c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k$.
   (a) Kirjoita tehtävä ensin ylimääräytyväksi yhtälösysteemiksi muotoon $X\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$, ja kirjoita sitten normaaliyhtälösysteemi. (Normaaliyhtälöissä esiintyvää matriisituloa ei tietenkään tarvitse yrittääkään yleisessä muodossa laskea.)
   (b) Olkoon Matlab-notaatiolla $\boldsymbol{x}$ =`2:5`, $\boldsymbol{y}$ =`[0 4 10 16]`.
   Muodosta 1. asteen PNS-polynomi eli PNS-suora. Piirrä datapisteet ja suora samaan kuvaan. (Saatiinhan "häivähdys Matlab:ia" mukaan!)

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

   (a) Muodosta diffyhtälösysteemin $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ yleinen ratkaisu.
   (b) Piirrä faasitasoon ominaisvektorit suuntanuolineen, hahmottele ainakin 2 vastakkaisiin suuntiin avautuvaa trajektoria, ja selvitä O:n luonne ja stabiilisuus.
   Vihje: Ominaisarvojen suhde paljastaa hyvin trajektorien kulun, kun sitä katsotaan ominaisvektorikoordinaatistossa. Jos otat käyräparametriksi luvun $s = e^{\lambda_1 t}$, niin näet. (λ_1 on (itseisarvoltaan) pienempi ominaisarvo)

4. (a) Muodosta e^{At} matriisille $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. (**Vihje:** Helpointa käyttää e^{At}:n määritelmää. Muodosta A:n potensseja ja vertaa tunnettuihin sarjakehitelmiin (joita annettu alla). Pitemmän kaavan kauttakin saat laskea.)
   (b) Kirjoita alkuarvotehtävän $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = [c, 0]^T$ ratkaisulauseke. Mikä faasitason käyräparvi on kyseessä?
   (c) Laske *Eulerin menetelmällä* kolme askelta alkupisteestä $(1, 0)$ lähtien askelpituudella $h = 0.1$ ja piirrä vastaava murtoviiva faasitasoon.

5. Sivuiltaan lämpöeristetyn sauvan ($c = 1$) pituus olkoon $L = 1$ Alkuhetkellä $t = 0$ sauvalla on vakiolämpötila $f(x) = 50°\mathrm{C}$, $0 < x < 1$, ja sen päät sijoitetaan jääveteen, 0°C, ts. sauvan lämpötilafunktio $u(x, t)$ toteuttaa reunaehdot $u(0, t) = u(1, t) = 0$ kaikkina aikoina t.
   (a) Eksplisiittinen iteraatiokaava saa yksinkertaisimman muotonsa
   $$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}),$$
   kun valitaan $r = 0.5$, missä $r = \frac{k}{h^2}$ ($h = \Delta x$, $k = \Delta t$).
   Miten pitkän ajan t_1 kuluttua sauvan kohdassa $x = 0.2$ (ja $x = 0.8$) lämpötila alittaa 40°C ja mikä tuo lämpötila on, kun laskentahila määräytyy askelista $h = 0.1$, $k = 0.005$
   (b) Laske pisteessä $x = 0.2$ edellä saadulla arvolla $t = t_1$ lämpötilan approksimaatio, joka saadaan ottamalla analyyttisen sarjaratkaisun ensimmäinen termi.
   Ohje: Käsin laskettaessa kannattaa käyttää suoraan annettua differenssikaavaa, eikä ajatella matriisituloa. Älä laske muita kuin ne arvot, joita tarvitaan esitettyyn kysymykseen vastaamiseen. Älä hämmästy, vaikka (a)- ja (b)-kohtien approksimaatiot eivät aivan yksiin osu.

Kaavoja, ohjeita

Lämpöyhtälön $u_t = c^2\,u_{xx}$ ratkaisu, kun sauvan pituus L, reunat 0° :ssa ja alkuehtona $u(x, 0) = f(x)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\,\pi\,x}{L} e^{-\lambda_n^2\,t}, \quad \lambda_n = \frac{c\,n\,\pi}{L},$$

missä kertoimet b_n ovat Fourier-sinisarjan kertoimia, jotka ovat:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sarjakehitelmiä:

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$
$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$