Teknillinen korkeakoulu Apiola/Tikanmäki
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2008
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08`

Laskuharjoitus 5 (viikko 49 , 30.11 – 4.12.2008)

Korjattu ja (muutamin ohjein ja linkein) täydennetty (27.11. klo 19.26)

Pääsivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/`
Luentosivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/L/Luento1-36.html`
Harjoitussivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/H/`
Matlab: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/H/matlab/`

Huomaa, että kurssikirjoissamme ei esiinny e^{At}:tä. Kts. tämän viikon linkkejä yo. `Luento1-36`-tiedostosta.

Muista: Voit käyttää MATLAB:ia laskimena vallan mainiosti ssh-pääteyhteydellä. Näissäkin harjoituksissa saattaa olla useita matriisilaskuja, joissa on suureksi avuksi MATLAB, vaikkakin ihan tekstitilassa. (Jos koneessasi ei ole ssh:ta, niin hae ihmeessä ATK-keskuksen sivulta.)

Symbolisiakin operaatioita voit tehdä tähän tyyliin: `syms t; expm(A*t)` . Maplella vielä kauniimmassa tulosmuodossa: `with(linalg); exponential(A);`
(Itse asiassa MATLAB:n symbolinen osuus tehdään Maplen ytimessä, mikäli *symbolic toolbox* on mukana, kuten TKK:lla on.)

Alkuviikko

1. Määritä e^{At} matriiseille

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   Vast, (c) $\begin{bmatrix} 1 & t & 1/2\,t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Ohje: Kaikissa kohdissa kannattaa käyttää sarjamääritelmää, tee myös (a)-kohta sillä (vaikka tulos on moneen kertaan sanottu). (b)-kohdassa kannattaa muistella sin:n ja cos:n sarjakehitelmiä. (Kts. ohjeita lopussa) Vaihtoehto (b)-kohdassa: diagonalisointi. (c)-kohdassa avainsana on *nilpotentti*, muodosta sarjaa, niin näet.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{y}_0 = [1, -1]^T$

   Etsi toinen LRT ratkaisu yritteellä $y_2 = t\,e^{\lambda t}\boldsymbol{x} + e^{\lambda t}\boldsymbol{u}$, missä $\boldsymbol{x}$ on ominaisvektori ja $\boldsymbol{u}$ määrättävä ns. yleistetty ominaisvektori.

   Vast: $\boldsymbol{y}(t) = e^{-2\,t}[1, -1]^T - 2\,te^{-2\,t}[3, -1]^T$

3. Määritä systeemin
$$\begin{cases} x' = x - x^2 + 2y + 3 \\ y' = -x + 2y \end{cases}$$
   kriittiset pisteet.

   Linearisoi systeemi kunkin kriittisen pisteen suhteen ja määritä niiden luonne sekä hahmottele faasikuvaa.

Loppuviikko

1. Muodosta $e^{A\,t}$ tehtävän AV 2 matriisille A ja kirjoita kaava samaisen alkuarvotehtävän ratkaisulle. (Ei tarvitse kertoa auki matriisituloja.)

   Vast: Matlab:ssa: `syms t; expm(A*t)` (tai Maplessa: `with(linalg): exponential(A,t);`)

2. Klassinen saalis-saalistaja-ongelma ("ketut ja jänikset", Volterran-Lotkan malli) on seuraavanlainen: Alueella olevien jänisten ja kettujen lukumääriä merkitään $x(t)$:llä ja $y(t)$:llä vastaavasti.

   Ajatellaan, että jänikset syövät ruohoa ja ketut jäniksiä (ja vain niitä). Kasvua rajoittavia tekijöitä ei ole, muuta kuin jäniksille ketut ja ketuille jänisten puute (eli kilpailevat ketut). Tilannetta mallintavat yhtälöt voisivat olla vaikkapa:
$$\begin{cases} x' = 200\,x - 4\,x\,y \\ y' = -150\,y + 2\,x\,y. \end{cases}$$
   Määritä systeemin kriittiset pisteet. Linearisoi siinä, jossa populaatiot eivät kuole sukupuuttoon. Piirrä `pplane`:lla joitakin trajektoreita.

3. Määritä edellä linearisoidun systeemin luonne ja piirrä jokin linearisodun trajektori, jonka siis pitäisi kuvata alkuperäistä epälineaarista systeemiä, jos ollaan lähellä kriittistä pistettä. (Tässä on kyllä tyyppi, joka yleisesti ottaen voi linearisoinnissa muuttua, mutta tämän systeemin tapauksessa säilyy.)

   Selvitä alkuperäisen systeemin trajektoria seuraamalla, miten populaatiot kehittyvät yhden kokonaisen jakson kuluessa.

4. Tarkastellaan vaimennettua heiluria, jonka yhtälö on
$\Theta'' + c\,\Theta' + k\,\sin(\Theta) = 0.$

   Määritä kriittiset pisteet ja linearisoi niissä. Toisin sanoen, suorita vastaavat asiat, jotka tehtiin luennolla vaimentamattoman heilurin yhteydessä.

   Hahmottele tavalla tai toisella, mieluiten `pplane`:llä trajektoreita ja selvitä niitä seuraamalla heilurin käytöstä, vertaa vaimentamattoman käytökseen.

   Ohje: Jos avaat KRE8-kirjan s. 177, saat varsin pitkälle menevää avustusta. Suorita joka tapauksessa linearisointi Jakobiaanin avulla, eikä KRE-tyylillä. `pplane`-ohje: Valitsemalla *Gallery* ja sieltä *pendulum*, voit asettaa vaimennusta enemmän tai vähemmän. Kokeile pienellä vaimennuksella aluksi ainakin.

5. Sovella Eulerin menetelmää lineaariseen systeemiin $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$ $y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 4.$

   Käytä askelpituutta $h = 0.2$ ja laske 3 askelta. Piirrä ratkaisupolku y_1y_2-tasoon (faasitasoon)

   Ratkaise tehtävä myös tarkasti, ominaisarvojen avulla. Hahmottele trajektori ja piirrä edellä saatu ratkaisupolku samaan kuvaan.

6. Ratkaise edellä oleva jänis-kettu-systeemi Eulerin menetelmällä. $x(0) = 100, y(0) = 100$ ja laske 3 askelta käyttäen askelta $h = 0.001$. Piirrä polku $xy-$tasoon (faasitasoon). Piirrä mielellään samaan kuvaan "oikea"(ts. paremmalla numeerisella menetelmällä laskettu) trajektori. Helpoiten se käy `pplane`:lla.

Ohjeita, kaavoja

Sarjakehitelmiä

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \ldots$
$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \ldots, \qquad \cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 - \ldots$

2×2-käänteismatriisi

Koska esimerkeissä tulee tällaisen laskeminen monta kertaa vastaan, annetaan valmis kaava:
Jos $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, niin $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. (Päälävistäjän alkiot vaihdetaan, sivulävistäjän miinustetaan, jaetaan $\det(A)$:lla.)

Linearisointi:

Olkoon DYS $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$ ja olkoon (a,b) kriittinen piste (KRP), ts. $f(a,b) = g(a,b) = 0$.
Pisteessä (a,b) linearisoitu systeemi tarkoittaa systeemiä
$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, missä $u = x - a, \quad v = y - b$ ja A on Jacobin matriisi:

$$A = J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{bmatrix}$$

Jos linearisoidun systeemin O:n luonne on keskus (ominaisarvot puhtaasti imaginaariset), se ei välttämättä kerro alkuperäisen epälineaarisen systeemin KRP:n luonnetta. Muissa tapauksissa ($Re(\lambda) \neq 0$) sensijaan kertoo.

Diff. yhtälöiden numeriikkaa

Annettu diff. yhtälö(systeemi): $y' = f(t,y), \quad y(t_0) = y_0$

Jos kyseessä on systeemi, niin f ja y ovat vektoriarvoisia.

Eulerin menetelmä $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad y(t_0) = y_0$ GKV $= O(h)$ (GKV=**G**lobaali **k**atkaisu**v**irhe)

Numeerisia menetelmiä laskiessasi voit hyvin käyttää tavallisen laskimen sijasta Matlabia laskimena. Eräs tapa on määritellä systeemin oikea puoli (vektori)funktioksi, jolloin laskeminen on pelkkää riemua! Esim:

```
>> F=inline('[-y(1)+y(2);-y(1)-y(2)]','y')
>> h=0.2;
>> y0=[0;4]; Y=y0;
>> y1=y0+h*F(y0); Y=[Y y1]; y0=y1; % Toista nuolinäppäimellä.
...
```