Teknillinen korkeakoulu Apiola/Tikanmäki
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2008
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08`

Laskuharjoitus 4 AV (viikko 48 , 25 – 28.11.2008)

Tällä viikolla AV-harjoitus suoritetaan perinteisellä liitutaulutylillä, LV-harjoitus on tietokoneharjoitus, MATLAB:n lisäksi suuntakentän ja faasitason piirto-ohjelma:
`http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html [pplane]`.
voit kokeilla näissäkin, siihen tarvitset vain selaimen (Javaa ymmärtävän).
Viitteet: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/L/Luento1-36.html`
Lisäohjeita kääntöpuolella.

Alkuviikko

1. Määritä vanhastaan tunnetulla tavalla yleinen ratkaisu lineaarisille homogeeniyhtälöille:
   (a) $y'' + y' - 6y = 0$ ja
   (b) $y'' - 2y' + 10y = 0.$

2. Kaksi säiliötä, A ja B sisältää $50l$ nestettä kumpikin. Niitä yhdistää kaksi putkea siten, että $A \to B$ virtaa nestettä nopeudella 5 l/min ja $B \to A$ 2 l/min ja oletetetaan, että neste sekoittuu heti. Puhdasta vettä virtaa säiliöön A nopeudella 3 l/min ja säiliöstä B poistuu nestettä niinikään nopeudella 3 l/min. Oletetetaan, että alkuhetkellä säiliö A sisältää 25 kg suolaa ja säiliö B pelkkää vettä.

```
              ----------          ----------
 3 l/min  -->           |          |         |
     --                 |__________|         |
      |                  5 l/min ->          |
      |                 -----------          |
      |    A            |          |    B    |
      |                 |----------|         |
      |                  <-- 2 l/min         |
      |                 |----------|        ----
      |___________      |          |____________-> 3 l/min
```

   (a)Kirjoita tehtävä differentiaaliyhtälöpariksi ja määritä suolamäärät kummassakin säiliössä ajan funktiona.
   (b) Miten pitkän ajan kuluttua suolamäärät säiliöissä ovat yhtäsuuret?

   (Tietokoneharjoituksessa saat piirtää suolamääräfunktioiden $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ kuvaajat ajan funktiona ja myös trajektorin $(y_1(t), y_2(t))$. Kts. mallia:
   `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/08/L/suolafaasi.html`)

3. Muunna seuraavat lineaariset differentiaaliyhtälöt/ryhmät 1. kertaluvun ryhmiksi. (Tarkoitus **ei ole** ratkaista systeemejä.)
   (a) $y''' + e^t y' + y = 0,$
   (b) $\begin{cases} y_1'' - y_1' - 2y_1 = t^2 \\ y_2'' - y_2 - 3y_1 = 0 \end{cases}$
   Vihje: (a) $y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y''$
   (b) $y_3 = y_1', \quad y_4 = y_2'$

4. Määritä yleinen ratkaisu systeemille $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 8/3 & 5/3 \end{bmatrix}$.

   Piirrä kuvaan ominaisvektorit ja niille "virtauksen" suuntanuolet. Piirrä lisäksi pisteisiin $(1,0)$ ja $(1,1)$ liittyvät suuntakentän suuntanuolet, jotka saat suoraan yhtälöstä. Hahmottele käsin joitakin trajektoreita. Mikä on origon tyyppi ja stabiilisuus?

   Huom! Kuvan piirtäminen ohjelmalla jätetään tietokoneharjoitukseen, saat toki mieluusti kokeilla alussa mainittua `pplane`-ohjelmaa, mutta edellä olevia johtopäätöksiä varten ei pelkkä kuvasta katsominen riitä.

5. Olkoon 2×2 lineaarisen vakiokertoimisen diffyhtälösysteemin $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}$ matriisilla A kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda < 0$, ja olkoon sillä kaksi LRT ominaisvektoria $\boldsymbol{x}_1$ ja $\boldsymbol{x}_2$.
   (a) Kirjoita yleisen ratkaisun $\boldsymbol{y}(t)$ lauseke.
   (b) Hahmottele systeemin faasitasokuva suuntanuolineen ja selvitä O:n luonne ja stabiilisuus. Miten kuva (ja luonne) muuttuu, jos $\lambda > 0$?

   Vihje: Helpointa on ehkä ajatella ominaisvektoreita. Hyppää mielivaltaiseen tason pisteeseen ja mieti, voisitko kenties sijaita O:n kautta kulkevalla ominaissuoralla. **Tai** pidä tuo ominaisvektorikanta annettuna ja päättele ominaisarvon avulla, mikä on trajektorin esitys tässä kannassa.

6. Ratkaise alkuarvotehtävä $\boldsymbol{y}' = A\,\boldsymbol{y}, \;\; \boldsymbol{y}(0) = [0.1, 0]$ missä $A = \begin{bmatrix} -1/2 & -2 \\ 1 & 3/2 \end{bmatrix}$

   Kevennykseksi ominaisarvot, ole hyvä! $\lambda = \frac{1}{2} \pm i$. Piirrä trajektorin hahmotelma ja selvitä KRP-origon luonne ja stabiilisuus.
   Huom! (1) Riittää laskea esim. arvoa $\frac{1}{2} + i$ vastaava ominaisvektori, toinen saadaan "liittovektorina", ts. konjugoidaan edellisen koordinaatit.
   (2) Voit ratkaista AA-tehtävän suoraan kompleksimuotoisesta esityksestä tai (luultavasti hiukan vähemmällä vaivalla) reaalimuotoisesta.

Oppia, ohjeita:

Trajektori tarkoittaa vain sitä, että piirretään $y_1\,y_2-$tasoon pisteitä $(y_1(t_1), y_2(t_1)), (y_1(t_2), y_2(t_2)), \ldots$. Näistä pisteistä $(y_1(t), y_2(t))$, t :n juostessa läpi reaaliarvoja, muodostuu tuo faasitasokäyrä, eli trajektori.

Lineaaristen $2 \times 2-$systeemien faasitasoluokitus

Ominaisarvot λ_1, λ_2. Tyyppikuvaus ja stabiilisuus viittaavat kriittiseen pisteeseen, joka lineaarisella homogeenisella on $\mathbf{0}$. (Jos A on singulaarinen, niin kaikki $N(A)$:n pisteet ovat kriittisiä pisteitä, mutta alla olevassa luokittelussa tämä suljetaan pois (ts. ominaisarvo 0 on suljettu pois).

- Samanmerkkiset $\Longrightarrow$ *noodi*, jos < 0, niin *nielunoodi*, (vahvasti) stabiili, jos > 0, niin *lähdenoodi*, epästabiili, Trajektorit voivat näyttää potenssifunktiomaisilta erilaisin potenssein (riippuu ominaisarvojen suhteesta), erikoistapauksessa voivat olla jopa sädekimppu. Käytöstä voisi ehkä kutsua yleistetyn "paraabelimaiseksi"

- Erimerkkiset $\Longrightarrow$ *satula*, epästabiili. Sama potenssikäytös kuin edellä, nyt "hyperbelimäisesti"
- Vain yksi ominaisvektori $\Longrightarrow$ *degeneroitunut noodi*, jos ominaisarvo $\lambda < 0$, nielu (stabiili) ja jos $\lambda > 0$, niin lähde, epästabiili. Trajektori eivät ulkonäöltään paljon eroa noodityylistä.

- Puhtaasti imaginaariset ominaisarvot $(\pm bi)$, *keskus*, heikosti stabiili. Trajektorit ellipsejä.

- Kompleksiset ominaisarvot $\lambda = \alpha \pm i\beta$, *lähdespiraali*, jos $\alpha > 0$, epästabiili, ja *nieluspiraali*, jos $\alpha < 0$, stabiili. Trajektorit elliptisiä spiraaleja.