Teknillinen korkeakoulu Apiola/Tikanmäki
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2008
http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08

Laskuharjoitus 3 (viikko 47 , 17 – 21.11.2008)

Matriisikertausta:
http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08/LAkertaus1.pdf
http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/08/LAkertaus2.pdf
Lyhyt Matlab-opas:
http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/
Octave(ilmainen "Matlab-klooni") http://www.gnu.org/software/octave/
voit ladata omalle koneellesi (kohta "downloads")

Alkuviikko

1. Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ortogonaalinen diagonalisointi (tarkoittaa ortonormaalia).

   Laskutyön vähentämiseksi annetaan:

```
>> eig(A)
ans =
        -2.00
         7.00
         7.00
```

   Neuvo: Muista, että ominaisvektorit eivät automaattisesti ole yksikkövektoreita, ja useampikertaista ominaisarvoa vastaavat ominaisvektorit eivät automaattisesti ole ortogonaaliset.
   Jos olet saanut samaan ominaisavaruuteen kuuluvat LRT ominaisvektorit $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$, niin ortonormaalin kannan saat
   1) geometrisen ajattelun avulla: Muodosta $\boldsymbol{v}_2$:n kohtisuora projektio $\boldsymbol{v}_1$:llä ja vähennä se $\boldsymbol{v}_2$:sta. Tai
   2) algebrallisesti: Määritä kerroin kerroin c siten, että $(\boldsymbol{v}_1 + c\,\boldsymbol{v}_2) \perp \boldsymbol{v}_1$.

2. Muodosta "ylimääräytyvälle" yhtälöryhmälle

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

   normaaliyhtälöt ja ratkaise pienimmän neliösumman (PNS,LSQ) mielessä. Piirrä suorat ja ratkaisupiste tasoon.

   Vastaustarkistuskeino: Huomaa, että MATLAB:n yhtälösysteemin ratkaisija: $x = A\backslash b$ on niin älykäs, että se ymmärtää ylimääräytyvässä tapauksessa suorittaa PNS-ratkaisun.

3. Eräässä mittauksessa saatiin seuraava data:

xdata	1	2	3	4	5
ydata	1.8	2.7	3.4	3.8	3.9

   Dataa mallinnetaan polynomilla $p(x) = c_1\,x + c_2\,x^2$.

   (a) Muodosta PNS-tehtävän matriisi X ja vektori $\boldsymbol{y}$ siten, että tehtävä saadaan ylimääräytyväksi yhtälöryhmäksi $X\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}$.

   (b) Ratkaise kerroinvektori $\boldsymbol{c}$. Piirrä data ja PNS-polynomi samaan kuvaan.

   Ohje: (b)-kohdassa saat mieluusti käyttää MATLAB:ia. Tee kuitenkin vaiheittain matriikertolaskut, transpoosit ym., lopuksi toki voit tarkistaa "takakenolla". Piirrä samaan kuvaan datapisteet ja polynomi.

   Piirtäminen käy näin:

```
xd=1:5; yd=[1.8 ...]; plot(xd,yd,'x'); hold on;
kertoimet=[c2 c1 0]; x=linspace(1,5); y=polyval(kertoimet,x);
plot(x,y,'r'); xlim([0 6]); grid on
```

   Huomaa, että `polyval` haluaa kertoimet korkeimmasta potenssista alkaen.

   Vast: $p(x) = 1.76x - 0.2x^2$

   Arvostelusta: Pelkkä (a)-kohta antaa puolet maksimista. Jos välttämättä haluat räpeltää laskimella (b)-kohtaa, niin sekin hyväksytään käsin hahmotellun kuvan säestyksellä.

Loppuviikko

1. Osoita, että joukko $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ on $\mathbb{R}^3$:n ortogonaalinen kanta, kun $\boldsymbol{v}_1 = [1, 0, 1]^T$, $\boldsymbol{v}_2 = [-1, 4, 1]^T$, $\boldsymbol{v}_3 = [2, 1, -2]^T$, ja esitä vektori $\boldsymbol{x} = [8, -4, -3]^T$ näiden kantavektorien avulla.
   Huom: Tarkoitus on hyödyntää ortogonaalisuutta, ei "Gaussata".

2. Määritä PNS-ratkaisu tehtävälle $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}^T$. Hyödynnä QR-hajotelmaa, joka annetaan:

```
>> format rational
>> A=[1 -1;1 4;1 -1;1 4];
>> [Q,R]=qr(A)
Q =
      -1/2            1/2          -7/10          -1/10
      -1/2           -1/2           1/10          -7/10
      -1/2            1/2           7/10           1/10
      -1/2           -1/2          -1/10           7/10
R =
      -2             -3
       0             -5
       0              0
       0              0
```

Matlab muodostaa ns. täyden QR-hajotelman. Kuten huomaat, riittää ottaa Q:n kaksi ensimmäistä saraketta ja R:n 2 ensimmäistä riviä, miten nyt vain haluat. Huomaa siis, että Q on ortogonaalinen ja R on yläkolmiomatriisi.

3. *Interpolaatio vs. PNS* Olkoon annettu datapisteet (x_i, y_i), $\quad i = 0 \ldots n$. Tehtävänä olkoon määrittää korkeintaan astetta n oleva polynomi p (siis $n+1$ kerrointa), joka kulkee kaikkien datapisteiden kautta, eli $p(x_i) = y_i$, $\quad i = 1 \ldots n$.

(a) Muodosta lineaarinen yhtälöryhmä polynomin kertoimien määräämiseksi. Miten yhtälöryhmän matriisi muodostetaan? (Vrt. tietokoneharj, `help vander`.) Huomaa, että jos polynomissasi kertoimet ovat kasvavan potenssin mukaisessa järjestyksessä, pitää MATLAB:n Vandermondelle sanoa `V=fliplr(V)` (flipLeftRight).

(b) Pidetään tunnettuna, että polynomi-interpolaatiotehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu (x_i-pisteet oletetaan erillisiksi). Esimerkiksi *Lagrangen* menetelmä antaa olemassaolo- ja yksikäsitteisyystodistuksen sekä kaiken kukkuraksi ratkaisulausekkeen muodossa $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$, missä L_i tarkoittaa ns. *Lagrangen kertojapolynomia.*

Muodosta PNS-tehtävän matriisi sovitettaessa dataan astetta $k < n$ oleva polynomi ja osoita, että sillä on LRT sarakkeet.

Käytännön laskut: *Vandermondea* ei yleensä käytetä interpolaatiossa. Kun asteluku kasvaa, matriisin häiriöalttius ("condition number") kasvaa vauhdilla.

Matlabilla sekä PNS-polynomi että sen erikoistapaus, interpolaatio sujuvat leikitellen yhdistelmällä `polyfit,polyval`.

4. (a) Päättele Gershgorinin lauseen avulla matriisin $A = \begin{bmatrix} 11 & 0.4 & -0.5 \\ 0.4 & 7 & a \\ -0.5 & a & 4 \end{bmatrix}$ ominaisarvojen likiarvot ja missä rajoissa ne ovat.

(b) Millä a:n reaaliarvoilla nähdään suoraan, että matriisi on kääntyvä. (Tarkoitus ei ole laskea determinanttia tai ominaisarvoja, korkeintaan tarkistuksesi ja varmistuksesi Gershgorinin pätevyydelle, mutta tämä on "vapaaehtoista".)

5. Ominaisarvojen laskentamenetelmiä, Power method [KRE^9] Sec. 20.8

Sovella potenssimenetelmää (3 kierrosta) matriisiin $A = \begin{bmatrix} 3.5 & 2.0 \\ 2.0 & 0.5 \end{bmatrix}$ alkuarvolla $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1]^T$. Laske *Rayleigh-osamäärät* q ja virherajat.

vast: $q = 4, 4.493, 4.4999; |\epsilon| \leq 1.5, 0.1849, 0.0206$

6. Osoita, että jos $\boldsymbol{x}$ on ominaisvektori, niin $\delta = 0$ virhekaavassa (2) Theorem 1 s. 872 (KRE^9, luvun 20.8, Power Method for Eigenvalues alkusivulla) .