1.7 Lineaarinen riippumattomuus (LRT)/riippuvuus (LRV)

Palauta mieleen virittäminen. Taso voidaan virittää 2:lla erisuuntaisella vektorilla. Toki viritys onnistuu aina vain runsaammin, jos otetaan lisää vektoreita. Yleensä pyritään karsimaan riippuvuudet, tähdätään **minimaaliseen virittäjäjoukkoon**.

Vektoriyhtälöllä

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

on triviaaliratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Mutta **onko muita?**

Yhtäpitävä (HY):n kanssa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbf{R}^n$ on **lineaarisesti riippumaton** (LRT), jos vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

on vain triviaaliratkaisu. Joukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ on **lineaarisesti riippuva** (LRV), jos on olemassa kertoimet $c_1, \ldots, c_p$, jotka kaikki eivät ole nollia siten, että

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

$$\uparrow$$

lineaarinen riippuvuusrelaatio

(ainakin jokin $c_j \neq 0$)

EXAMPLE Olkoot $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a. Osoita, että $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineaarisesti riippumaton.

b. Määritä lineaarinen riippuvuusrelaatio vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ välillä.

Ratkaisu: (a)

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 on vapaa muuttuja $\Rightarrow$ ei-triviaaleja ratkaisuja on, joten vektorit ovat LRV.

(b) rref-muoto: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{ll} x_1 & = \\ x_2 & = \\ x_3 & \end{array}$

Olkoon $x_3 = 1$ (mielivaltainen luku $\neq 0$). Tällöin $x_1 = -33$, $x_2 = 18$.

$$\_\_ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \_\_ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + \_\_ \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eli

$$-33\,\mathbf{v}_1 + 18\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

(Eräs lineaarinen riippuvuusrelaatio, muut saadaan mieliv. vakiolla kertomalla.)

Erikoistapauksia *1. Yhden vektorin joukko*

Tarkastellaan yhden vektorin joukkoa: $\{\mathbf{v}_1\}$, $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$.

Ainoa ratkaisu yhtälölle $x_1\mathbf{v}_1 = 0$ on $x_1 = 0$.

$$\boxed{\text{Siten } \{\mathbf{v}_1\} \text{ on LRT, kun } \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}.}$$

2. Kahden vektorin joukko

Esim. Olkoot

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Selvitä, onko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ LRT/LRV.

b. Sama tälle: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Ratkaisu: (a) Huomaa, että $\mathbf{u}_2 = \_\_\mathbf{u}_1$. Siksi

$$\_\_\mathbf{u}_1 + \_\_\mathbf{u}_2 = 0$$

Tämä merkitsee, että $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ on LR __ .

(b) Olkoon

$$c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Jos $c \neq 0$, niin $\mathbf{v}_1 = \frac{-d}{c}\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_1$ olisi $\mathbf{v}_2$:n skalaarikerrannainen, mikä ei pidä paikkaansa. Siten on oltava $c = \_\_$, mutta silloinhan myös $d = \_\_$

Niinpä $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ on LR_ joukko.

2. Kahden vektorin joukko on

- LRV, jos ainakin toinen on toisen skalaarikerrannainen.
- LRT, jos kumpikaan ei ole toisen skalaarikerrannainen.

3. Joukko, joka sisältää 0*-vektorin on LRV*

Jos $\vec{0}$ kuuluu vektorijoukkoon $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbf{R}^n$, niin S on LRV.

Tod: Järjestetään vektorit niin, että $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Nollavektorin kertoimeksi voidaan valita mikä tahansa, vaikka $c_1 = 29$. Muut voidaankin valita nolliksi:

$$29\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

mikä osoittaa, että S on LR_ , koska ____ .

4. LRV joukon ylijoukko on LRV, LRT joukon osajoukko on LRT

Tod: Olkoon vaikka $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ LRV. Silloin vektoriyhtälöllä

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

on epätriviaali ratkaisu, eli jokin $c_j \neq 0, \quad c_j = 1, 2$ tai 3. No jos lisätään joukkoon jokin vektori $\mathbf{v_4}$, niin

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 + 0\,\mathbf{v_4} = \mathbf{0},$$

ja edelleenkin $c_j \neq 0$, joten

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \text{ on LRV.}$$

LRT-väite palautuu välittömästi tähän loogisella "kontarpositiolla".

Theorem 7 Lay s. 68, tod. s. 70

Indeksoitu joukko $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, jossa on ainakin kaksi vektoria on LRV, jos ja vain jos ainakin yksi on muiden lineaarikombinaatio.
Väitettä voidaan "terästää" näin:
Jos S on LRV ja $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, niin jokin vektori $\mathbf{v}_j$ $(j \geq 2)$ on sitä edeltävien vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$ lineaarikombinaatio.

Tod:

1. Jos jokin, sanokaamme nyt $\mathbf{v_p}$ on muiden lineaarikombinaatio:

$$\mathbf{v}_p = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{p-1}\,\mathbf{v}_{p-1},$$

niin

$$c_1\mathbf{v}_1 + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Siis LRV .

2. Oletetaan LRV. Siis on olemassa kertoimet $c_1, \ldots, c_p$:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

ja jokin $c_j \neq 0$. Voitaisiin siirtää muut kuin j. termi toiselle puolelle ja jakaa c_j :llä.

Tehdään samantien tuo väitteessä esitetty "terästetty"muoto:

Olkoon j suurin indeksi, jolla $c_j \neq 0$. Oltava $j > 1$, koska $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Siis

$$c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_j\,\mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \quad c_j \neq 0.$$

Siirretään muut toiselle puolelle ja jaetaan c_j:llä:

––––––––––––––––––––

$\square$

4. Joukko, jossa on liikaa vektoreita, $\mathbb{R}^n$*:n* $(n+1)$ *vektoria*

Theorem 8 (Lay s. 69)

Vektorijoukkko on LRV, jos siinä on enemmän vektoreita kuin vektorien pituus, ts. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ $p > n$.

Todistus: Olkoon $A = [\mathbf{v_1} \quad \ldots \quad \mathbf{v_p}]$ Vektoriyhtälö kirjoitetaan homogeeniseksi matriisiyhtälöksi $A\vec{x} = \vec{0}$. No, tähän meillä on valmis lause, mutta aina voidaan ajatella uudestaan tukisarakkeiden lukumäärä. No ajatellaan — $\square$

Esim. (omatoimisesti) Päättele minimaalisella työmäärällä seuraavien vektorijoukkojen LRT/LRV :

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ b. Matriisin $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ sarakkeet.

c. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ d. $\left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$