

Mat-1.4334 peruskurssit KP3-II

L 1

Heikki Apiola

heikki.apiola@hut.fi

7. marraskuuta 2006

Lineaarialgebraa

1.1: Lineaarinen yhtälösystemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Esimerkkejä epälineaarisista:

$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2 \quad \text{tai} \quad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

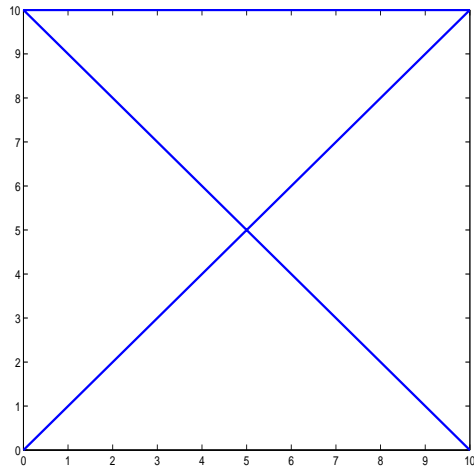
Lineaarisen systeemin ratkaisu:

Lukujono (vektori) $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälösystemin (1), kun sijoitetaan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Tyypiesimerkit 2×2 systeemeille

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

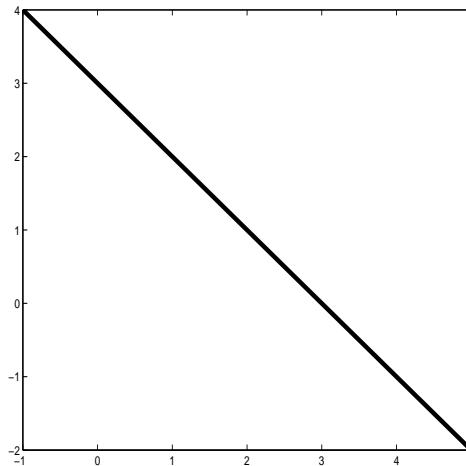


Yksi ratkaisu

konsistentti

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

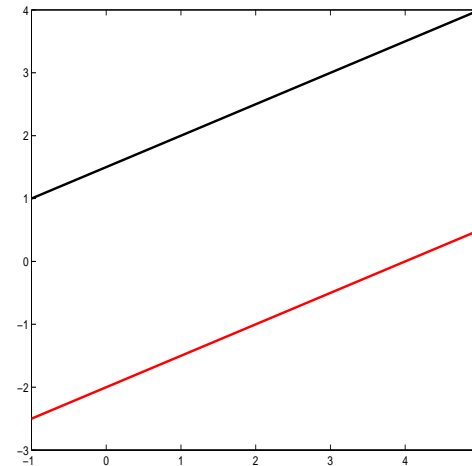


Äärettömän monta

konsistentti

$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$2x_1 - 4x_2 = 8$$



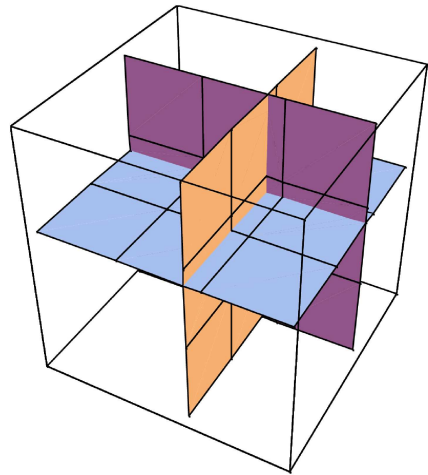
Ei ratkaisuja

epäkonsistentti

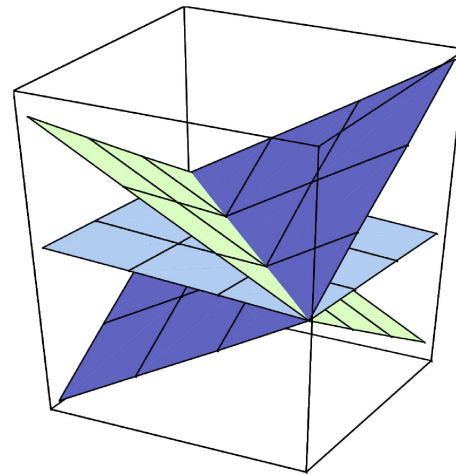
Perustotuus Yleisellä lineaarisella $m \times n$ systeemillä on vain nämä kolme mahdollisuutta. Tämän selvitämme perusteellisesti lähiaikoina.

ESIMERKKI: Kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta. Kukin yhtälö määrää tason 3–ulotteisessa avaruudessa.

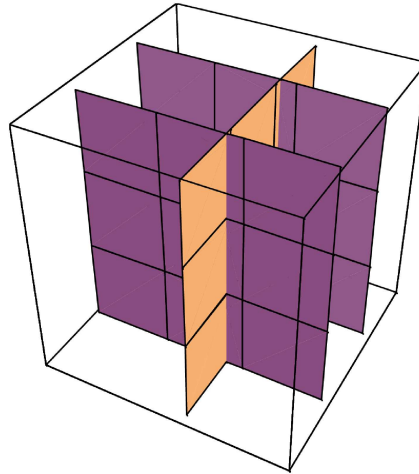
i) Tasot leikkaavat 1 pisteessä
(yksikäsitteinen ratkaisu)



ii) Tasot leikkaavat pitkin suoraa
(ääretön määrä ratkaisuja)



iii) Tasot yhtyvät iv) Tasoilla ei yhteisiä pisteitä (*ei ratkaisuja*)



Tapaukset i), ii) ja iii) ovat *konsistentteja*, iv) on *epäkonsistentti*.

Tapauksissa ii) ja iii) ratkaisujoukot ovat äärettömiä
edellisen "dimensio" on 1 ja jälkimmäisen 2.

$$” \dim(ii) = 1, \quad \dim(iii) = 2 ”$$

Lineaarisen yhtälösystemin Ratkaisujoukko:

Kaikkien mahdollisten ratkaisujen muodostama joukko

Ekvivalentit systeemit:

Lineeriset yhtälösystemit ovat **ekvivalentit**, jos niillä on samat ratkaisujoukot.

Yhtälösystemin ratkaisustrategia:

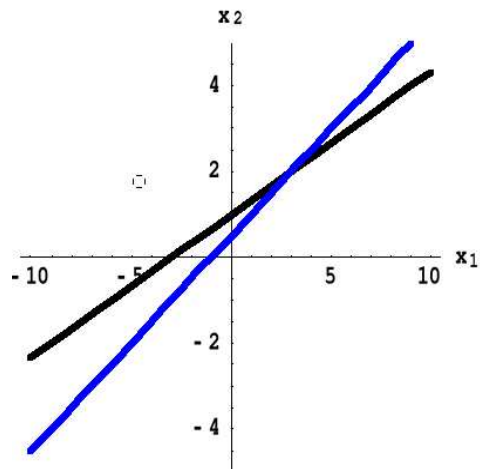
Muokataan yhtälösystemi ekvivalentiksi systeemiksi, joka on helppo ratkaista

ESIMERKKI:

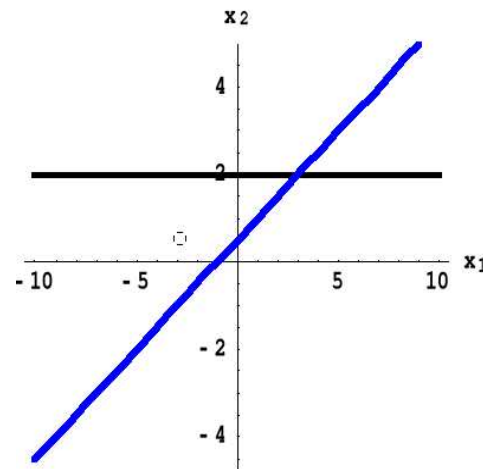
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 & & Y_2 \leftarrow Y_1 + Y_2 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 & & \\ x_1 & - & 2x_2 & = & -1 & & Y_1 \leftarrow Y_1 + 2Y_2 \\ & & x_2 & = & 2 & & \end{array}$$

Viimeksi saatu yhtälö on muodossa, josta ratkaisut saadaan peräkkäisillä sijoituksilla alhaalta ylöspäin edeten (takaisinsijoitus, "back substitution").
 Voidaan vaihtoehtoisesti suorittaa vielä yksi eliminaatioaskel alhaalta ylöspäin.

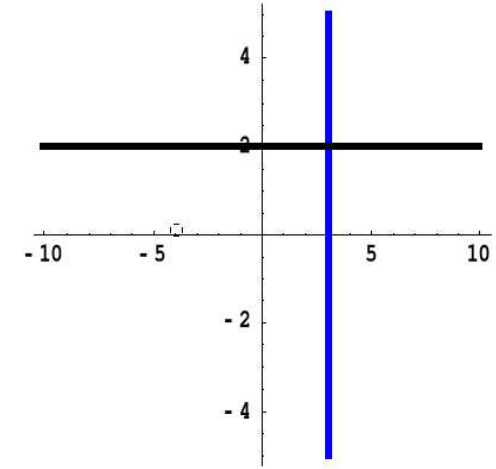
$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 = 3 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -1 \\ & & x_2 = 2 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 3 \\ & & x_2 = 2 \end{array}$$



Matriisinotaatio

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(kerroinmatriisi)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 = 3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(liitännäismatriisi)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & 2x_2 = -1 \\ & & x_2 = 2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & & = 3 \\ & & x_2 = 2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Alkeisrivioperaatiot:

1. (*Rivien vaihto*) Vaihdetaan kaksi riviä keskenään : $\text{rivi}_i \leftrightarrow \text{rivi}_k$
2. (*Skaalaus*) Rivin alkiot kerrotaan nolasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow c \text{rivi}_k, \quad c \neq 0$$

3. (*Lineaarikombinaatio*) Riviin lisätään toinen rivi kerrottuna nolasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow \text{rivi}_k + c \text{rivi}_i$$

Huom! Operaatioissa 2 ja 3 ainoastaan yksi rivi (k :s) muuttuu, muut säilyvät ennallaan. (Operaatiossa 1 kaikki rivit säilyvät ennallaan, vain paikat vaihtuvat.)

Riviekvivalentit matriisit ja yhtälösystemit: Matriisit A ja B ovat *riviekvivalentit*, jos ne voidaan muuntaa toisikseen alkeisrivioperaatioilla.

Yhtälösystemit ovat riviekvivalentit, jos niiden liitännäismatriisit ovat sitä.

Riviekvivalentit ovat ekvivalentit:

Lause Riviekvivalentit yhtälösystemit ovat ekvivalentit, ts. niillä on samat ratkaisujoukot.

Todistus Rivien vaihto ja skaalaus kertoimella $c \neq 0$ säilyttävät ratkaisut.

$$\begin{cases} L_1 \vec{x} = b_1 \\ L_2 \vec{x} = b_2 \\ \dots \\ L_m \vec{x} = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \vec{x} = b_1 \\ c L_1 \vec{x} + L_2 \vec{x} = c b_1 + b_2 \\ \dots \\ L_m \vec{x} = b_m \end{cases}$$

Vasen \implies **oikea**: Kertomalla c :llä ja laskemalla yhteen yhtälöt 1 ja 2.

Oikea \implies **vasen**: Kertomalla eka c :llä ja vähentämällä toisesta.

Takaisinsijoitus

Edetään alhaalta ylös:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 4x_3 + 4 = 16 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29 \end{cases}$$

Ratkaisu on siis $(29, 16, 3)$ ja se on yksikäsitteinen. (Miksi?)

Takaisinsijoituksen sijasta voitaisiin viimeksi saadusta porrasmuodosta jatkaa eliminointia alhaalta ylös ja oikealta vasemmalle, päämääränä nollata myös jokaisen tukisarakkeen yläosa. Jatko menisi tähän tapaan:

Peruskysymykset – olemassaolo ja yksikäsitteisyys

- 1) Onko systeemi konsistentti, ts. onko ratkaisuja?
- 2) Konsistentin systeemin ratkaisujen lukumäärä? Milloin yksikäsitteinen ratkaisu?

ESIMERKKI: Onko systeemi konsistentti?

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

Tälle laskettiin edellä porrasmuoto (yläkolmiomuoto) (ref):

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\x_2 - 4x_3 &= 4 \\x_3 &= 3\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tästä näkyy, että systeemi on konsistentti ja ratkaisu on yksikäsitteinen. **EIKÖ VAIN!**

ESIMERKKI: Miten on tämän systeemin ratkaisujen laita?

$$\begin{array}{rcl} 3x_2 - 6x_3 = 8 & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & -6 & 8 \end{array} \right] \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right] \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 & \left[\begin{array}{cccc} 5 & -7 & 9 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Solution: Rivioperaatioilla:

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

Palataan havainnollisuuden vuoksi yhtälömuotoon:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_2 - 6x_3 = 8 \\ 0x_3 = -3 \quad \leftarrow \text{Ei toteudu sitten millään } x_3\text{:lla} \end{array}$$

Annettu systeemi on epäkonsistentti (ts. ei ratkaisuja).

ESIMERKKI: Millä h :n arvoilla seuraava systeemi on konsistentti?

$$\begin{aligned} 3x_1 - 9x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 6x_2 &= h \end{aligned}$$

Ratkaisu: Porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h + \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Toinen yhtälö; $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$. Tämä toteutuu vain, jos $h + \frac{8}{3} = 0$ eli $h = -\frac{8}{3}$.

Ensimmäinen yhtälö on $x_1 - 3x_2 = \frac{4}{3}$. Ratkaisuja ääretön määrä.

Johtopäätös: Systeemi on konsistentti jos ja vain jos $h = -\frac{8}{3}$.

Tällöin ∞ määrä ratkaisuja.