Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II

FOURIER-SARJAT

HEIKKI APIOLA

Teknillinen korkeakoulu
Matematiikan laitos

Sisältö

Johdanto, merkintöjä

Kirjallisuutta:

[Kre99, Luku 10],[J$^+$99, Luku] ,[C$^+$01, Luku 23], [BN01, Luku 1] ,[M.D88, Luku 10], [TW98,]

Aaltomuotojen analysointi... Fourier-analyysi antaa työkalut, joiden avulla aalto voidaan jakaa taajuuskomponentteihinsa.

Usein on hyödyllistä ajatella signaalia taajuuskomponenttiesityksenä, eikä pelkästään aikaesityksenä.

Signaalin suodatus ...

Date: 30. marraskuuta 2006.

Suodatetaan pois taajuudet, joita ei haluta, jotka ovat teheneet tehtävänsä, kuten kantoaalto.

Historiaa: Trig. sarjat 1700-luvulla värähtelevien kielien yms. yhteydessä.

1808 Fourier: Lämmönjohtuminen, julkaistiin vasta 1822

Riemann-integraali, lebesgue-integraali syntyivät tässä yhteydessä. ”arose in the study of F-series”(and the related F-transf.)

Sovellutuksia: Tod ja til., signaalinkäsittely, kvanttimekaniikka...

datan pakkaaminen ...

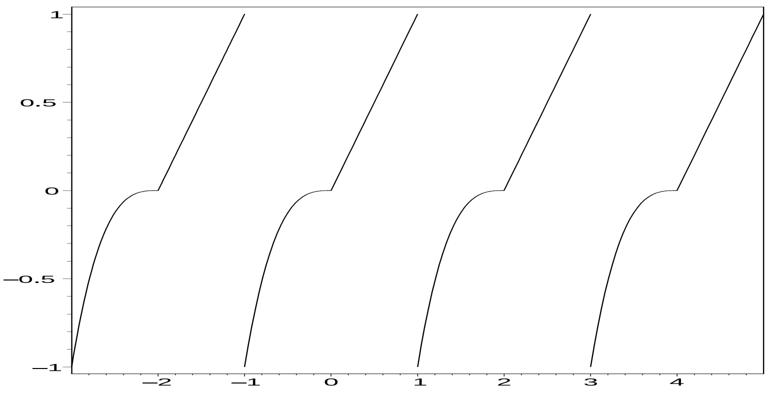
200 vuotta on kulunt, edelleen tärkeä sekä teoreettisesti että sovelluksissa. (niissä ja nyt vasta onkin!)

[**?**] For a historical survey + references ...

Klassinen Fourier-sarja Sturm-Liouville: Where Fourier series ”comes from”Jakso $\to$ ∞ -> Fourier-integraali -> Fourier-muunnos

Euler 1707-1783
D'Alembert 1717-1783
Bernoulli 1700 - 1782
Clairault 1713-1765
Dirichlet 1805-1859 riittävät ehdot 1829

History: Jeffrey: Trig. series 1956, Kline: Math. Thought ... 1972



Kuva 1. Jaksollinen funktio, jakso=2

1. Jaksolliset funktiot, trigonometriset sarjat

Funktio $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ on jaksollinen, jaksona $p > 0$, jos $f(x+p) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Jos f on p-jaksoinen, niin se on kp-jaksoinen kaikilla $k \in \mathbb{N}$ Pienin tällainen luku p on *perusjakso.*

Onko nyt varmasti tällainen pienin jakso aina olemassa? No eipä olekaan! Vakiofunktio on selvästi jaksollinen miten pienin jaksoin hyvänsä, ts. jokainen $p > 0$ kelpaa jaksoksi.

Jaksollinen funkto ($p = 2$) näyttää tyypillisesti kuvan 1 mukaiselta.

Huomautus 1.1. *Signaalinkäsittelyn yhteydessä erityisesti merkitään yleensä muuttujaa t:llä, viitaten aikaan. Usein jaksoa merkitään tällöin kirjaimella T.*

Noudatamme tässä enimmäkseen kirjan [1] (KRE8:AEM luku10) merkintöjä, mutta esittelemme myös muita yleisessä käytössä olevia tilaisuuden tullen.

Esimerkki 1.1. *Tutuimmat ja perustavanlaatuisimmat jaksolliset funktiot ovat* sin *ja* cos*, joiden (perus)jakso* $= 2\pi$.

Jos ω on positiivinen reaaliluku, niin $\cos\omega x$ ja $\sin\omega x$ ovat $\frac{2\pi}{\omega}-$ jaksoisia, sillä olkoon vaikkapa $f(x) = \cos\omega x$ ja olkoon $p = \frac{2\pi}{\omega}$. Tällöin

$f(x+p) = \cos\omega(x+p) = \cos(\omega x + 2\pi) = \cos\omega x = f(x).$

Kokoamme yhteen joitakin jaksollisten funktioiden ominaisuuksia, jotka ovat välittömiä seurauksia määritelmästä.

Lause 1.1. *(Jaksollisuus)*

1. *p-jaksoisten funktioiden summa on p-jaksoinen,*
2. *vakio kertaa p-jaksoinen funktio on edelleen p-jaksoinen.*
3. *Jos funktio on p-jaksoinen, niin se on np-jaksoinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$.*
4. *Jos f on p-jaksoinen, niin $\int_a^{a+p} f(x)$ ei riipu pisteestä a.*

Tod. Kohdat $1, 2, 3$ voidaan huoletta jättää lukijalle harjoitustehtäviksi, kohta 4 voidaan laskea suoraan integraalin määritelmän nojalla. Integraalia approksimoivan Riemannin summan termit ovat jaksollisuuden takia pareittain yhtäsuuret, ne vain summataan eri järjestyksessä. (Voidaan toki tehdä myös muuttujanvaihdolla.) $\square$

Kaksi ensimmäistä ominaisuutta tarkoittavat lineaarialgebran kielellä ilmaistuna: *p-jaksoiset funktiot muodostavat vektori(ali)avaruuden.*

Edellisen esimerkin mukaan erityisesti $\cos n\,x$ ja $\sin n\,x$ ovat $\frac{2\pi}{n}$-jaksoisia ja siten myös 2π-jaksoisia, joten muotoa

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

oleva summa on 2π-jaksoinen. Jos tällaiset summat lähestyvät raja-arvoa $s(x)$, kun $N \to \infty$, niin rajafunktio $s(x)$ on myös $2\pi - jaksoinen$. Kyseessä on tällöin *trigonometrinen sarja*, joka on pääasiallinen mielenkiintomme kohde seuraavassa.

1.1. **Trigonometrinen sarja.** Tutkimme trigonometrista sarjaa:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Erityisesti signaalianalyysin yhteydessä merkitsemme muuttujaa usein x:n sijasta t:llä. Edustakoon $f(t)$ signaalia, kuten ajasta riippuvaa sähköjännitettä, musiikki- instrumentin tuottamaa ääniaaltoa tms. Funktion f esitys trigonometrisena summana antaa signaalin esityksen eri taajuuskomponenttien avulla.

Tyyppiä $\sin kt$ olevan siniaallon jakso on $\frac{2\pi}{k}$ ja (kulma)taajuus k (ts. k värähdysjaksoa 2π:n pituisella aikavälillä.) Kulmataajuus voi olla tietysti myös mielivaltainen positiivinen reaaaliluku ω, jolloin siniaalto on $\sin \omega t$, jakso $= \frac{2\pi}{\omega}$ ja taajuus (värähdystä aikayksikössä) on $\frac{\omega}{2\pi}$.

Jos signaalimme on vaikkapa

$$f(t) = 2\sin t - 100\sin 3t + 10\sin 50t,$$

niin se sisältää taajuuskomponentit, jotka värähtelevät (kulma)taajuuksilla $1, 3$ ja 50 kertaa 2π:n levyistä aikaväliä kohti. Taajuudella 3 värähtelevä komponentti dominoi, sen amplitudi 100 on merkittävästi suurempi muiden komponenttien amplitudeja.

Kaksi tyypillistä sovellusaluetta:

1) Korkeataajuuksisen "kohinan" suodattaminen Data compression [3](BOG–NAR s. 38 alh.)

2) Datan pakkaaminen

Tavallinen tehtävä signaalinkäsittelyssä on tiedon pakkaaminen. Tarkoituksena on lähettää signaali siten, että minimoidaan siirrettävän tiedon määrä, mutta säilytetään mahdollisimman hyvin olennainen tietosisältö. Eräs tapa on esittää signaali trigonometrisenä sarjana ja lähettää vain ne kertoimet a_k, b_k, jotka ovat itseisarvoltaan suurempia kuin jokin annettu toleranssi.

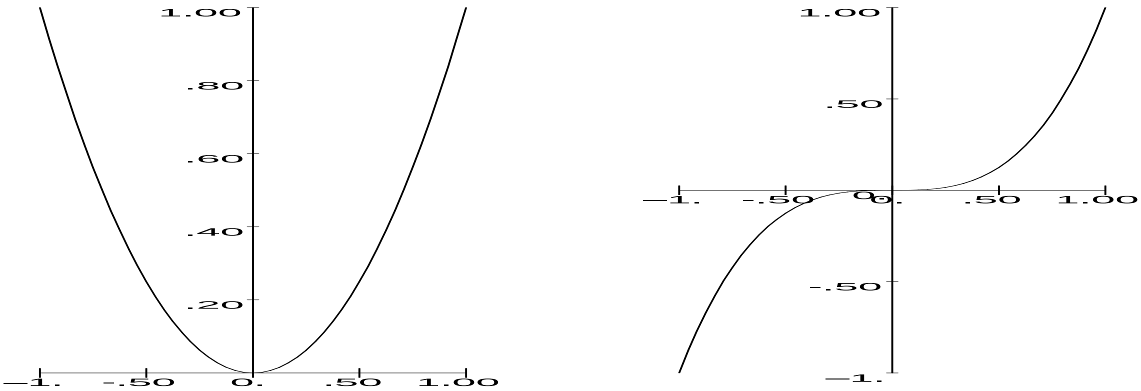
Voidaan osoittaa, että yleisillä funktiota f koskevilla ehdoilla kertoimet $a_k \to 0$ ja $b_k \to 0$, kun $k \to \infty$ (*Riemann-Lebesgue*- lemma). Siten jokaista annettua (positiivista) toleranssia kohti vain äärellinen määrä kertoimia jää lähetettäväksi.

1.2. **Parilliset ja parittomat funktiot.** Tarkastelemme funktiota $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

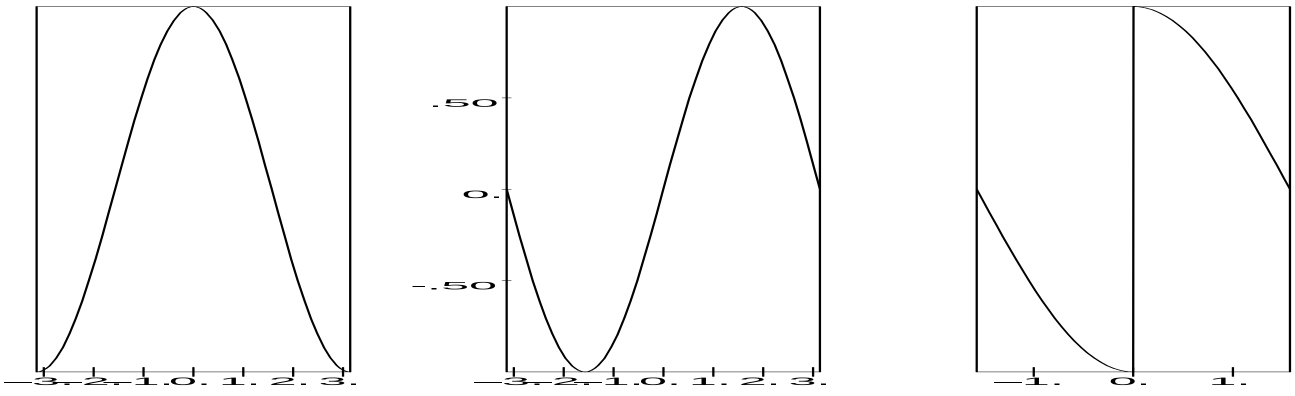
Määritelmä 1.1. *Funktio f on* parillinen, *jos $f(-x) = f(x)$ ja* pariton, *jos $f(-x) = -f(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x.*

Tyyppiesimerkkejä parillisista funktioista ovat parilliset potenssifunktiot sekä cos ja cosh ja parittomista vastaavasti parittomat potenssit, sin ja sinh.

Muita esimerkkejä: e^{-x^2}, sgn. Jälkimmäinen tarkoittaa "merkki-funktiota, ts. funktiota, joka saa arvot $-1, 0, 1$ sen mukaan, onko argumentti negatiivinen, nolla vai positiivinen. Lukija päätelköön näiden funktioiden parillisuus/parittomuus-käytöksen. Alla on muutama tyypillinen kuva.



KUVA 2. Parillinen (x^2) ja pariton (x^3)



KUVA 3. Parillinen (cos), pariton (sin) ja pariton epäjatkuva funktio

Huomautus 1.2.

1. *Mielivaltainen reaaliakselilla määritelty funktio ei yleensä ole parillinen eikä pariton.*
2. *Jokainen postiivisella reaaliakselilla määritelty funktio voidaan jatkaa koko reaaliakselille parilliseksi tai yhtä hyvin parittomaksi funktioksi. Edellinen saadaan aikaan määrittelemällä $f(x) = f(-x)$, kun $x < 0$ ja jälkimmäinen määrittelemällä $f(x) = -f(-x)$, kun $x < 0$.*

Välitön seuraus määritelmästä on:

Lause 1.2. *(Tulon pariteetti)*
f pariton g pariton $\Longrightarrow$ fg parillinen,
f pariton g parillinen $\Longrightarrow$ fg pariton,
f parillinen g parillinen $\Longrightarrow$ fg parillinen,

Todistus. Kyse on vain siitä, että kahden samanmerkkisen luvun tulo on positiivinen ja erimerkkisten tulo on negatiivinen. Esimerkiksi ensimmäinen kohta menee näin: Olkoot f ja g parittomia. Tällöin
$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x)$.
Muut kohdat vastaavasti. □

Fourier-kertoimien laskemisessa on syytä tottua käyttämään sujuvasti hyväksi yksinkertaista ja havainnollista integrointiseikkaa:

Lause 1.3. *(Parillisen/parittoman integraali)*

a) *Jos f on pariton ja $c > 0$, niin*

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 0.$$

(b) *Jos f on parillinen, niin*

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} f(x)\,dx.$$

Todistus. Jos tulkitsemme integraalin pinta-alana, niin vakuutumme asiasta välittömästi kuvaa katsomalla. Muodollinen todistus voidaan tehdä joko suoraan integraalin määritelmään nojautuen tai kaikkein mekaanisimmin suorittamalla muuttujanvaihto $x = -t$. Edellinen tapa on samanlainen edellä esitetyn, jaksollisen funktion integroinnin kanssa: Tässä tapauksessa symmetrisessä asemassa origon suhteen olevat Riemannin summan termit joko kumoutuvat (pariton) tai ovat keskenään yhtäsuuret (parillinen). $\square$

2. Jaksollisen funktion Fourier-sarja

Peruskursseilla 1-2 on kehitetty "sileitä"funktioita *Taylorin sarjoiksi* ja tutkittu, millä ehdoilla sarja suppenee ja esittää annettua funkiota. Kyseessä on potenssisarja:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

missä kertoimet saadaan kaavalla $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Tyypillisesti tällainen sarja esittää funktiota jossain kehityskeskuksen x_0 riittävän pienessä ympäristössä.

Voimme sanoa, että Taylorin sarja on kehitelmä, jossa "kantafunktioina"ovat monomit $(x - x_0)^n$.

Tällä kertaa tarkastelemme koko reaaliakselilla määriteltyä jaksollista funktiota ja etsimme sille sarjakehitelmää jaksollisten "kantafunktioiden"$\cos nx$ ja $\sin nx$ avulla.

2.1. **Eulerin kaavat Fourier-sarjan kertoimille.** Olkoon $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jaksollinen, oletamme aluksi merkintöjen yksinkertaistamiseki, että jaksona on $p = 2\pi$. Myöhemmin palautamme yksinkertaisella muuttujan vaihdolla yleisen tapauksen tähän.

Kuten usein matematiikassa, lähdemme liikkeelle siitä oletuksesta, että funktiolla on suppeneva sarjaesitys:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

Johdamme kertoimille välttämättömät lausekkeet. Myöhemmin tarkastelemme ehtoja, joiden vallitessa sarjakehitelmä on voimassa.

Kertoimien johtaminen on helppoa. Se perustuu ortogonaalisuusideaan. Kyseessä on aivan sama asia kuin esitettäessä vektoriavaruuden vektoria ortogonaalisen kannan avulla.

Palautamme tämän mieleen, niin näemme.

Olkoon $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ vektoriavaruuden kanta. Halutkaamme esittää annettu vektori $\mathbf{v}$ tämän kannan avulla. Tässä tapauksessa tiedämme, että on olemassa esitys:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \mathbf{e}_k.$$

Kerrotaan tämä esitys puolittain sisätulon mielessä kantavektorilla $\mathbf{e}_j$, jolloin saadaan:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = \xi_j,$$

koska $\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{k,j}$.

Muistele lineaarialgebraosuutta!

Fourier-sarjan tapauksessa "kantavektoreina" on funktiot $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$. Voimme määritellä funktioavaruudessa sisätulon integraalina:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

Aivan kuten tutummissakin vektoriavaruuksissa, sanomme funktioavaruuden vektoreita f ja g *ortogonaalisiksi* ja merkitsemme $f \perp g$, jos $\langle f, g \rangle = 0$.

Tehtävänämme on ensin osoittaa, että kantafunktiot muodostavat ortogonaalisen joukon.

Siihen tarvitsemme trigonometrisia kaavoja, joilla sinin ja kosinin tulot saadaan lausutuksi summina.

Kosinin yhteenlaskukaavat:

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

Laskemalla ensin yhteen ja sitten vähentämällä puolittain saadaan kosinien ja sinien tulot lausutuksi summien avulla, jolloin integrointi käy helposti.

$$\begin{cases} \cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \end{cases}$$

Näistä saadaan sijoittamalla $\alpha = nx$ ja $\beta = mx$:

$$\begin{cases} \cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)) \\ \sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}(\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) \end{cases}$$

Tämän trigonometrisen pikku harjoitelman jälkeen saamme ortogonaalisuustuloksen aivan suoraan:

1. $\cos nx \perp \cos mx$, jos $n \neq m$, sillä

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)) = 0, \text{kun} \quad n \neq m.$$

Jos $n = m$, tulee yllä olevan integraalin 1. termistä π ja jälkimmäisestä 0, ts. $\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(nx))^2 \, dx = \pi$.

2. $\sin nx \perp \sin mx$, jos $n \neq m$. Tämä menee aivan vastaavasti jälkimmäisen tulokaavan avulla. Jos $n = m$, saadaan tässäkin tapauksessa π.

3. $\cos nx \perp \sin mx$ aina (vaikka olisi $n = m$), sillä sin on pariton ja cos on parillinen, joten niiden tulo on pariton, ja siten integraali yli O:n suhteen symmetrisen välin = 0.

Kertoimien johtaminen

Toimimme edellä olevan vektoriavaruusmallin mukaisesti, kun käytössämme on trigonometrisen systeemin muodostama ortogonaalinen "kanta". Tällä kertaa käsittelemme kuitenkin ääretöntä summaa. Tässä vaiheessa vältämme vaikeudet olettamalla, että on luvallista operoida samaan tapaan kuin äärellisillä summilla.

Myöhemmin palaamme kysymykseen operaatioiden luvallisuudesta. Tämä on hyvin tavallista matematiikassa. Katsotaan, mitä seuraa, jos teemme sellaisia oletuksia, joiden vallitessa saamme tuloksia johdetuksi. Voimassaolotarkastelu tehdään sitten erikseen (tai vedotaan siihen, että se "voidaan tehdä").

Olettakaamme siis, että annettu 2π-jaksoinen funktio f voidaan esittää sarjana

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2.2}$$

Kerroin a_0

Kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain vakiofunktiolla 1 ja integroidaan $\int_{-\pi}^{\pi}$. (Idea: $1 \perp \cos nx$, $1 \perp \sin nx$.)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx =$$
$$a_0 2\pi \quad + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx}_{=0} \quad + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx}_{=0}$$

Saadaan siis:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Kertoimet $a_n, \quad n \geq 1$

Periaate on aivan sama kuin edellä. Jos $n \geq 1$ on kiinnitetty, kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain $\cos nx$:llä ja integroidaan. Tällöin summan kaikki muut termit ovat $= 0$, paitsi $\cos nx$-termi:

$$\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx \quad = a_0 \underbrace{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx}_{=0} \quad + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} a_n \underbrace{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx}_{=0,\,\text{kun}\quad k \neq n} \quad + \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} b_n$$
$$\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\,dx}_{=0 \quad \forall k}$$

Näin saadaan yhtälö:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 = a_n \pi,$$

josta ratkaistaan:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

Kertoimien b_n määrääminen

Ei ole vaikea arvata: Kerrotaan yhtälö (2.2) puolittain $\sin nx$:llä ja integroidaan.

Näin päädytään kaavaan:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

Olemme näin johtaneet **Eulerin kaavat Fourier-kertoimille**:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n \geq 1 \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

$$
f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{2.4}
$$

Kertoimia (2.3) sanotaan siis funktion f *Fourier kertoimiksi* ja sarjaa (2.2) *Fourier sarjaksi*. Kaavassa (2.2) käytetty merkki $\sim$ viittaa siihen, että emme vielä tiedä, millä ehdoilla sarja suppenee ja jos se suppenee, esittääkö se funktiota kaikissa tai ainakin joissakin pisteissä x.

2.2. **Esimerkkejä Fourier-sarjoista.** Eulerin kaavojen (2.3) avulla on (periaatteessa) helppoa ja mekaanista laskea funktioiden Fourier-sarjoja.

Aloitamme siis esimerkeillä, samalla saamme tuntumaa siihen, missä määrin sarja todella esittää annettua funktiota, ja miltä käyttäytyminen näyttää poikkeuspisteissä, joita ovat epäjatkuvuuspisteet.

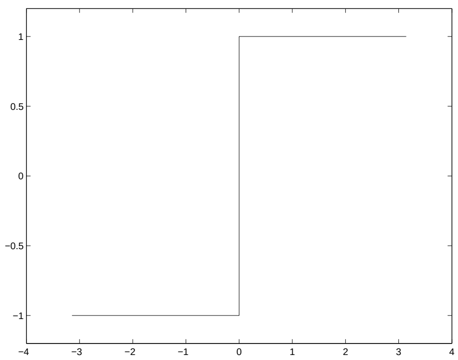
Esimerkki 2.1. *Aloitamme kanttiaallosta* [Kre99, Luku 10, s. 532]

Kyseessä on 2π-jaksoinen funktio, joka jaksovälillä $[-\pi, \pi]$ määritellään:

$$
f(x) = \begin{cases} -1, & kun -\pi < x < 0 \\ 1, & kun \;\; 0 < x < \pi \end{cases}
$$

Kuva saadaan MATLAB*:lla näin:*

```
>>plot([-pi 0 0 pi],[-1 -1 1 1])
>>ylim([-1.2 1.2])
```



KUVA 4. Kanttiaalto (perusjakso)

Lasketaanpa Fourier-kertoimet:

$$
a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right) = 0.
$$

(Laskettiinpa nyt kerran suoraan "silmät ummessa"integraalikaavasta.) Toki on älykkäämpää todeta, että f on pariton, ja siten integraali symmetrisen välin yli $= 0$. Tähän tyyliin lasketaan loput:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0,$$

koska f on pariton ja $\cos$ on parillinen (kts. Lauseet 1.2 ja 1.3 s. 3)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

koska $f(x)\sin nx$ on parillinen (Jälleen Lauseet 1.2 ja 1.3 , s. 3).Siten saadaan:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}\Big/_{0}^{\pi}\cos nx = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

Koska $\cos n\pi = (-1)^n$, on siis

$$b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

auki kirjoitettuna:

$$(b_n) = \frac{4}{\pi}(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots).$$

Fourier-sarja on siten:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right). \tag{2.5}$$

Voidaan kirjoittaa $\sum$-notaation avulla näin:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Ensi töiksi riennämme piirtämään sarjan osasummien kuvia, jotta näemme, onko hommassa jotain järkeä.

```
clf
x=linspace(-pi,pi);
y1=(4/pi)*sin(x);
y3=y1+(4/pi)*sin(3*x)/3;
y5=y3+(4/pi)*sin(5*x)/5;
plot([-pi 0 0 pi],[-1 -1 1 1])
ylim([-1.2 1.2])
hold on

plot(x,y1)
plot(x,y3)
plot(x,y5)
```

Kts: `http://www.math.hut.fi/teaching/k3/03/L/` tai
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/04/L/matlab/` sieltä löytyy mm.

`demokantti0.m  demokantti1.m  demokantti2.m  demoesim3.m`

Suorita MATLAB:ssa sopiva `addpath`-komento ja sitten `demokantti1`.

Havaintoja, päätelmiä

Kanttiaaltofunktion sarjasta (merk. $s(x)$) näemme seuraavia asioita:

1. $s(0) = s(n\pi) = 0 = \frac{1}{2}(f(0-) + f(0+))$, missä $f(x-) = \lim_{x\to 0-} f(x)$ ja $f(x+) = \lim_{x\to 0+} f(x)$ ovat vasemman ja oikeanpuoleiset raja-arvot. Tämä nähdään sijoittamalla sarjaesitykseen (2.5) $x = 0$ tai $x = n\pi$, jolloin sarjan kaikki termit ovat $= 0$, joten sarja suppenee taatusti kohti lukua 0.
2. Jos tietäisimme, että sarja suppenee esim. pisteessä $x = \frac{\pi}{2}$ kohti arvoa $f(\frac{\pi}{2}) = 1$, saisimme

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\dots\right),$$

josta seuraisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$$

Erikoistapauksena saisimme tuloksen, jonka *Leibniz* johti geometrisluonteisella päättelyllä v. 1673.

Niinpä yleispätevä Fourier-sarjojen suppenemislause, joka soveltuisi esimerkiksi kanttiaallon tapaukseen, sisältää erikoistapauksenaan tämän *Leibniz*'n tuloksen, jonka todistus ei ole aivan yksinkertainen.

Kuten ylläolevasta esimerkistä voidaan päätellä, yleiset Fourier-sarjojen suppenemistulokset ovat syvällisiä. Yleensäkin sarjojen summia on vaikea laskea (paitsi geometrisen sarjan). Fourier-sarjojen suppenemistulokset antavat muun hyvän lisäksi erään menetelmän tietynlaisten sarjojen summien laskemiseksi.

Ilahduttavaa on, että matemaatikot ovat pystyneet todistamaan helposti todennettavia yleisiä riittäviä ehtoja, jotka takaavat Fourier-sarjan suppenemisen laajalle joukolle funktioita. Voitaneen kovin paljon liioittelematta sanoa, että tekniikan sovellutuksissa esiintyvistä funktioista valtaosa toteuttaa nämä ehdot.

Fourier-sarjojen teoria on matemaattisesti vaikeaa, edelleenkin siinä on avoimia kysmyksiä. Suppenemisteoriassa ei vieläkään tunneta välttämättömiä ja riittäviä ehtoja, kenties sellaisia ei ole tai ei koskaan löydetä? Kuitenkaan matemaattisella vaikeudella ei kannata likaa pelotella. Tuo yllä mainittu tekniikan tarpeisiin hyvin riittävän lauseen todistus, vaikka onkin jonkinverran pitkä, ei vaadi mitään peruskurssin 1 yli menevää matemaattista esitietoa.

Sovellutusten kannalta hyvä uutinen on luonnollisten ja helposti verifioitavien riittävien ehtojen olemassaolo ja Fourier-sarjojen helppo ja mekaaninen laskenta. Toki voi tulla vastaan integrointivaikeuksia, jolloin on turvauduttava numeeriseen integrointiin.

2.3. **Fourier-sarjojen suppeneminen.** Jokaiselle $2\pi-$ jaksoiselle integroituvalle funktiolle voidaan muodostaa Fourier-sarja kaavojen (2.3) ja (2.2, s. 12) avulla.

Huom: $2\pi-$ jaksoisuudessa ei ole mitään "maagista", kohta näemme, miten mielivaltainen jakso palautuu tähän yksinkertaisella muuttujan skaalauksella. Niinpä kaikki yleiset $2\pi-$ jaksoisia koskevat päätelmät ovat yhtä hyvin voimassa muille jaksoille. Kaavat toki muuttavat hieman muotoaan tuon skaalauksen takia.

Luonnolliset kysymykset

- Suppeneeko sarja kaikilla/joillakin x:n arvoilla?
- Jos sarja suppenee pisteessä x, niin onko sen summa $= f(x)$, ts. esittääkö sarjan summafunktio annettua funktiota f ?

Integroituvuudelle riittävä ehto on paloittain jatkuvuus, joka oli esillä jo Laplace-muunnosten yhteydessä. Kerrataan tässä:

Määritelmä 2.1. *Funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on paloittain jatkuva (P.J.), jos väli voidaan jakaa äärelliseen määrään osavälejä jakopisteillä $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ siten, että*

1. *f on jatkuva kullakin* avoimella *osavälillä (x_{k-1}, x_k), $\quad k = 1 \ldots N$ ja*
2. *f:llä on äärelliset raja-arvot lähestyttäessä kunkin osavälin päätepisteitä ao. osavälin sisältä, ts. vasemmssa päätepisteessä x_{k-1} on oikeanpuoleinen raja-arvo ja oikeassa päätepisteessä x_k vasemmanpuoleinen, $k = 1 \ldots N$.*

Paloittain jatkuvalla funktiolla on siten (korkeintaan) äärellinen määrä epäjatkuvuuspisteitä, ja nämä ovat äärellisiä hyppäyksiä, eli yksinkertaista tyyppiä.

Fourier-sarjojen teoria käsittelee jaksollisia funktioita, siten kaikki informaatio funktiosta sisältyy yhteen jaksoväliin. Tässä yhteydessä emme siten tarvitse käsitettä *paloittain jatkuvuus* koko $\mathbb{R}$:ssä määritellylle funktiolle. Muissa yhteyksissä (kuten Laplace-muunnokset) sitä tarvitaan: Paloittain jatkuvaksi sanomme sellaista funktiota, joka on edellisen määritelmän mielessä paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä osavälillä.

Esimerkki 2.2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 2 \\ 7, & x = 2 \\ 8 - x, & 2 < x < 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$$

Alla oleva koodi antaa kätevän tavan esittää kuvia MATLAB*:lla. Jos haluat nähdä, leikkaa/liimaa Matlab-istuntoon. Tässä opetamme samalla erään helpon tavan funktion kuvaajan piirtoon,* `fplot`.

```
clf; clear
fplot('x.^2',[0,2]); hold on
plot([2],[4],'o'); plot([2],[7],'*r')
fplot('8-x',[2,5]); plot([5],[3],'o')
plot([5],[0],'*r')
axis([0 5.3 -0.4 7.3]); shg
```

Jos haluat katsoa MATLAB*-ajon, jossa on nämä komennot sekä samalla vuorovaikutteinen esimerkki hyppyä monimutkaisemmasta epäjatkuvuudesta, sijoita tiedosto* `http://www/opetus/k3/04/L/matlab/demopaljat.m` MATLAB*-polun varrelle ja komenna* MATLAB*:ssa:* `>> demopaljat` .

Vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat

Laplace-muunnosten ja Fourier-sarjojen yhteydessä määritellään toispuoliset derivaatat lievemmin kuin 1-peruskurssissa.

Lievennys on teorian kannalta olennainen, saamme kipeästi kaivattuja funktioita Fourier-sarjojen suppenemislauseiden piiriin.

Määritelmä 2.2 (Vasemman- ja oikenpuoleiset derivaatat)**.** *(Fourier- ja Laplace-teorian tarvitsemassa väljennetyssä muodossa)*

$$f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-)}{h}, \quad f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+)}{h}$$

Huomautus 2.1. *Tavanomainen vasemmanpuolinen/oikeanpuolinen derivaatta määritellään niin, että erotusosamäärän* kantapisteenä *on $f(x_0)$. Silloin pätee:*

Lause 2.1 (Vanhan (peruskurssin 1) terminologian mukaan)**.** *f on derivoituva pisteessä x_0, jos ja vain jos f:llä on x_0:ssa vasemman- ja oikeanpuoliset derivaatat ja ne yhtyvät.*

Nyt käytettävän väljemmän määritelmän mielessä esim. kanttiaaltofunktiolla on hyppypisteessä sekä vasemman- että oikeanpuoleinen derivaatta ja kumpikin $= 0$. Funktio ei kuitenkaan ole ko. pisteessä edes jatkuva, saati sitten derivoituva.

Alkuperäisessä, ahtaammassa mielessä muodostetut toispuoliset derivaatat riippuvat siitä, miten funktio määritellään ao. pisteessä x_0, sensijaan uuden, väljemmän määritelmän tapauksessa funktion arvolla x_0:ssa ei ole asiaan mitään vaikutusta. Tämä sopii yhteen sen kanssa, että Fourier-kertoimet saadaan integraaleina, joiden arvoihin ei vaikuta funktion arvo yksittäisessä pisteessä. Siten epäjatkuvan funktion hyppypisteissä ei yleensä ole tarpeen spesifioda funktion arvoa.

Tehtävä 2.1. *Määritä demofunktiomme (2.2) vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat hyppypisteissä sekä "klassisen"että uuden väljennetyn määritelmän suhteen.*

Näiden käsitteiden perusteellinen esittely katsottiin tarpeelliseksi, jotta Fourier-sarjojen suppenemislauseeen käyttö saadaan vankalle pohjalle.

Muotoilemme lauseen 2π-jaksoiselle funktiolle, mutta luonnollisesti se pätee yhtä hyvin mille tahansa jakson pituudelle $p = 2L$ (tällöin viitataan vastaaviin modifioituihin kaavoihin, joihin kohta pääsemme).

Lause 2.2 (Fourier-sarjan suppenemislause)**.** *Olkoon f 2π-jaksoinen funktio, joka on paloittain jatkuva jaksovälillä $[-\pi, \pi]$ ja jolla on vasemman- ja oikeanpuoleiset derivaatat kaikissa välin $[-\pi, \pi]$ pisteissä (ts. kaikissa $\mathbb{R}$:n pisteissä).*

Tällöin f:n Fourier-sarja suppenee jokaisessa pisteessä x kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$.

Erityisesti sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(x)$ kaikissa pisteissä x, joissa f on jatkuva. Hyppypisteissä se suppenee kohti hyppäyksen keskiarvoa.

Todistus. Jätämme todistuksen tässä vaiheessa käsittelemättä. Palaamme aiheeseen myöhemmin. Peruskurssilla K3/P3 tai vast. voidaan harkinnan mukaan jättää asia tähän ja harjoitella pelkkää soveltamista. Toisaalta voidaan antaa ainakin pääperiaatteet, mutta emme kuitenkaan tällä kertaa (KP3-II,2006) □

Ensimmäiseksi voimme soveltaa lausetta edellä käsiteltyyn kanttiaaltoon. Kuvista ja laskuista havaitsemamme käytös saa näin matemaattisen perustelun. Ovathan vasemman- ja oikeanpuoliset derivaatat kaikkialla olemassa (ja ovat kaikissa pisteissä $= 0$) ja funktio on paloittain jatkuva.

Gibbs'n ilmiö. Jos piirretään esimerkiksi kanttiaallon Fourier-sarjan osasummia $S_N$ja katsellaan niiden käytöstä epäjatkuvuuspisteen lähellä, havaitaan, että osasummat heilahtelevat funktion arvon molemmin puolin suunnillleen yhtä paljon, n. 9% hyppäyksen suuruudesta, valittiinpa n kuinka suureksi tahansa. Ilmiön havaitsi *Gibbs.*

Tässä on klassillinen esimerkki funktiojonosta, joka suppenee pisteittäin kohti rajafunktiota, mutta ei "tasaisesti". Aikanaan ilmiö herätti hämmennystä, nykyisin on käytössä näiden suppenemislajien lisäksi muitakin, kuten edellä mainittiin. Ja hämmennys on hälvennyt.

2.4. **Mielivaltainen jakso $p = 2L$.** Luonnollisesti haluamme käsitellä kaikenlaisia jaksoja, emme vain jaksoa 2π. Yleinen tapaus palautuu käsittelemäämme 2π-jaksoiseen yksinkertaisesti muuttujan skaalauksella.

Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, jonka jakso $p = 2L$. Olkoon $t = \frac{\pi x}{L}$ ja merkitään $g(t) = f(x) = f(\frac{Lt}{\pi})$.

Tällöin g on 2π-jaksoinen, sillä:

$$g(t+2\pi) = f(\frac{L(t+2\pi)}{\pi}) = f(\frac{Lt}{\pi} + 2L) = f(\frac{Lt}{\pi}) = g(t),$$

koska f on $2L-$ jaksoinen.

Olkoon g:n Fourier-sarja:

$$g(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Koska $g(t) = f(x)$, missä $x = \frac{Lt}{\pi}$, on siten

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Toispuoliset raja-arvot ja toispuoliset derivaatat vastaavat tässä skaalausmuunnoksessa toisiaan, joten suppenemislauseen ehdot pysyvät samoina. Kertoimien laskemiseksi on luonnollista tehdä tuo samainen muuttujanvaihto t-muuttujasta $x-$ muuttujaan:

$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{Lt}{\pi})\,dt.$

Suoritetaan muuttujan vaihto $t = \frac{\pi x}{L}$, $dx = \frac{L}{\pi}dt$, integroimisrajat muuttuvat: $-L \dots L$. Saadaan siis:

2L-jaksoisen funktion Fourier-sarjan kaavat:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx,\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n \geq 1\\
f(x) &\sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Huomautus 2.2. *Lauseen 1.1 kohdan 4. mukaan jaksollisen funktion integraali yli jakson pituisen välin ei riipu integraalin aloituskohdasta. Siten yllä olevissa kaavoissa voidaan integraalit kirjoittaa muodossa* $\int_{x_0}^{x_0+2L}$ *mielivaltaisella luvulla* x_0*. Tästä voi joissain tapauksissa olla helpotusta käytännön laskuissa.*

Huomautus 2.3. *Jos suppenemislauseen oletukset ovat voimassa, voidaan* $\sim$ *vaihtaa yhtäsuuruusmerkiksi ja kirjoittaa siis reilusti:*

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}).$

Tällöin ajatellaan f :n arvo hyppyisteissä määritellyksi hypyn keskiarvona.

2.5. **Puolen jakson laajennukset.** Usein on sovelluksissa tilanne, jossa funktio on annettu välillä $[0, L]$. Tällöin on kaksi luonnollista tapaa jatkaa f $2L$- jaksoiseksi koko $\mathbb{R}$:ään.

(1) Jatketaan ensin parilliseksi määrittelemällä $f(x) = f(-x)$, kun $x < 0$. Näin saadaan välillä $[-L, L]$ määritelty parillinen funktio, joka jatketaan $2L$-jaksoisena koko $\mathbb{R}$:ään.

(2) Jatketaan parittomana, muuten siis sama kuin edellä, mutta asetetaan $f(x) = -f(-x)$, kun $x < 0$.

Toki on mielivaltainen määrä muitakin tapoja jatkamiseen. Eräs voisi olla sellainen, että jatketaan funktio 0:na välille $[-L, 0]$.

Parillinen ja pariton jatko ovat standarditapoja, jotka tulevat luonnollisesti vastaan monissa sovellustilanteissa. Näemme sen osittaisdifferentiaaliyhtälösovelluksissa.

Asiaa valaisee luennolla näyttämäni MAPLE-työarkki, joka on sekä Maple-muodossa että html-muodossa saatavilla luentosivulta:
`www.math.hut.fi/k3/04/L/Fsarjat.html` ja `www.math.hut.fi/k3/04/L/maple/Fsarjat.mws` .

Näissä on käytössä apufunktiot `JJ` ja `paritonjatko` sekä `parillinenjatko`. Esimerkissä jatketaan funktio $f(x) = x^3$ sekä parittomaksi fo että parilliseksi fe (o –"odd", e – "even"). Maanmainion operaattorin `JJ` avulla kumpikin jatketaan $4-$jaksoisiksi funktioiksi `fo2J` ja `fe2J`. (2 viittaa puoleen jaksoon).

Sitten kehitetään Fourier-sarjaksi. Parillinen jatko `fo2J` on jatkuva, siinä Fourier-osasummat näkyvät suppenevan varsin nopeasti kohti funktiota. Pariton on epäjatkuva, siinä näkyy Gibbs'n ilmiö. Otettaessa osasumma, jonka indeksi on 50, saadaan varsin tarkka approksimaatio muuten, paitsi epäjatkuvuuskohtien välittömässä läheisyydessä näkyy punaiset "lieskat", jotka juuri edustavat Gibbsin ilmiötä.

Huomautus laajennusten laskemisesta

Kyse on samasta asiasta jonka jo ensimmäisessä esimerkissämme kohtasimme: käytämme integroitavien parillisuutta/parittomuuta laskennan lyhentämiseksi. Tässä tapauksessa, kun määritelmä on alunperin annettu vain positiivisella puolella, tekninen helpotus on vielä hiukan parempi, koska Fourier-sarja voidaan laskea pelkästään alunperin annettujen, positiivisella puolella määriteltyjen arvojen perusteella, tarvitsematta ryhtyä laajennukseen.

2.6. **Fourier-sarjan suppeneminen.** Esitimme edellä (Lause 2.2) Fourier-sarjojen suppenemista koskevan peruslauseen ilman todistusta muodossa, jossa sitä on helppo soveltaa. Tarkastelemme tässä lähemmin suppenemiskysymystä. Tähdennämme myös sitä, että funktiosarjan suppenemista voidaan tarkastella erilaisten "normien" suhteen. Fourier-sarjojen käyttäytymisen tutkiminen on ollut lähtökohtana näiden ilmiöiden yleisemmänkin ymmärtämisen ja oivalluksen tiellä.

Tärkeimmät suppenemiskäsitteet ovat nimeltään *pisteittäinen suppeneminen, tasainen suppeneminen* ja *suppeneminen "keskiarvon mielessä"*.

Lause 2.2 käsittelee pelkästään ensin mainittua pisteittäistä suppenemista.

Riemann-Lebesgue lemma

Kaikissa esimerkeissämme on ollut voimassa ominaisuus: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aloitamme osoittamalla, että tämä pätee aina, kun f on paloittain jatkuva.

Eräs merkittävä käytännön seuraus on käytettäessä Fourier-sarjaa tiedon pakkaamisessa: Esitetään signaali Fourier-sarjana, talletetaan (lähetetään pitkin linjaa) vain ne, joiden itseisarvot ylittävät jonkun annetun kynnysarvon. Yllä mainitusta (alla todistettavasta) syystä niitä on vain äärellinen määrä. (Aiheesta muotoillaan pieni harjoitustehtävä.) Datan pakkaukseen käytetään yleisesti Fourier-muunnosta ja Wavelet-teoriaa, joissa lähtökohtana on Fourier-sarjojen teoria.

Kts. esim. [BN01]

Lause 2.3 (Riemann-Lebesgue lemma)**.** *Olkoon f paloittain jatkuva välillä $[a,b]$. Tällöin f:n Fourier-kertoimet a_n ja b_n lähestyvät kohti 0:aa, kun $n \to \infty$.*

Huomautus 2.4. *Paloittain jatkuvuus-oletusta voidaan lieventää huomattavasti, mutta emme pyrikään maksimaaliseen yleisyyteen.*

Todistus. On siis osoitettava, että

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0.$$

Todituksen idea aivan yleisessä muodossaan on se, että kun funktio f on annettu kiinteä funktio ja $\cos nx$ ja $\sin nx$ värähtelevät sitä suuremmalla taajuudella, mitä suurempi n on, niin riittävän suurilla ("riittävyys" riippuu annetusta funktiosta f) n:n arvoilla funktio on miltei vakio koko jakson aikana.

Analyyttinen todistus on erityisen helppo, jos tehdään lisäoletus: f on paloittain jatkuvasti derivoituva.

Todistus lisäoletuksin: f on paloittain derivoituva ja f' on paloittain jatkuva. Tämä oletus muuttaa todistuksen verrattoman helpoksi, kunhan huomataan tehdä osittaisintegrointi. Tällöin voidaan tarkastella mitä tahansa väliä $[a,b]$.

$$\int_a^b f(x)\cos(kx)dx = \frac{1}{k}\Big/_a^b f(x)\sin kx - \frac{1}{k}\int_a^b \sin(kx)f'(x)dx.$$

Kumpikin termi menee 0 :aan koska $\frac{1}{k} \to 0$, kun $k \to \infty$, ja integraali on itseisarvoltaan $|f'| : n$ integraalia pienempi. $\square$

Huomautus 2.5. Riemann–Lebesguen *lemman sijasta voisimme käyttää* Besselin epäyhtälöä *(kts.* [TW98, Thm 9.1 s. 292]*) Toisaalta* Riemann–Lebesguen *lemma voidaan todistaa elegantisti pelkästään olettamalla f integroituvaksi, kts.* [Rud74].

Jotta näkisimme, että suppenemsitodistus on täysin peruskurssien tiedoilla esitettävissä, esittelemme sen päävaiheet ja viittaamme yksityiskohtien suhteen kirjallisuuteen.

Samalla tulee näkyviin edellä mainittu periaate sarjesityksen johtamisesta: Johdimme kertoimien lausekkeet, joihin välttämättä päädymme, mikäli ”luonnolliset operaatiot”sarjoilla ovat sallittuja. Nyt käytämme näitä johdettuja lausekkeita (Fourier-kertoimien kaavoja) hyväksemme todistaaksemme, että kyseiset esitykset todella ovat voimassa.

Saamme johtua matemaattiseen tulokseen vaikka kuinka kyseenalaisilla ja likaisilla, intuition, unien, näkyjen, luulojen, haaveiden johdattelemilla tempuilla, kunhan pystymme jälkikäteen todistamaan, että kyseinen tulos on pätevä. Toki on hyödyllistä etsiä ehtoja, joiden vallitessa Fourier-kertoimien johtamisessa käytetyt termeittäin integroinnit ovat sallittuja, mutta tässä kohdassa niihin vetoaminen ei ole tarpeen.

Jätetään tällä kertaa kuitenkin tähän.

3. Harjoitustehtäviä Fourier-sarjoihin

harj.tex 29.4.03

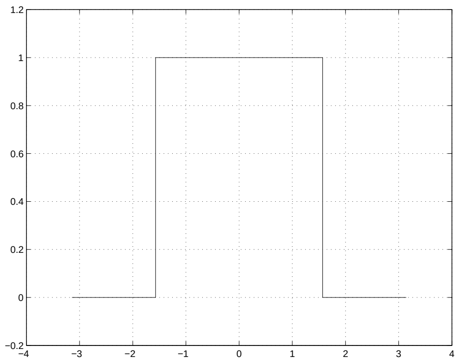
Jaksolliset, parilliset ja parittomat fkt.

GREE1 s. 455 Osoita, että parittomalle funktiolle f pätee: $f(0) = 0$.

1. Olkoot f ja g määritelty välillä $[-1, 1]$ (tai jollain O:n suhteen symmetrisellä). Oletetaan, että f on pariton ja f parillinen ja kumpikaan ei ole identtisesti 0. Osoita, että f ja g ovat lineaarisesti riippumattomia välillä $[0, 1]$.
2. Esitetään annettu funktio f muodossa $f = f_o + f_e$, missä
   $f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x + f(-x))$ ja $f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x - f(-x))$.
   Totea, että esitys on oikein laskettu ja osoita, että f_o on pariton ja f_e parillinen.
3. Joitakin esimerkkejä (Kts. GREE s. 455, teht. 5). Otetaan ensimmäiseksi e^x.

KRE s. 536 Muodosta funktion

```
plot([-pi -pi/2 -pi/2 pi/2 pi/2 pi],[0 0 1 1 0 0])
ylim([-0.2 1.2])
grid
shg
```



Fourier-sarja.
Ratkaisu:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx == \frac{1}{2\pi}1\pi = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int -\pi^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}\Big/_0^{\frac{2}{n\pi}} \sin nx = \frac{2}{n\pi}\sin n\frac{\pi}{2},$$

joten $a_n = \frac{2}{\pi}\left(1, 0, -\frac{1}{3}, 0, , \frac{1}{5}, \ldots\right), eli$
$a_{2k-1} = \frac{2(-1)^{k-1}}{\pi(2k-1)}$.

Koska f on parillinen, on $f(x)\sin(nx)$ pariton, joten $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$.
Siten

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos((2k-1)x)}{2k-1}.$$

```
% addpath /home/apiola/opetus/materiaali03/fourier
% addpath \usr\heikki\opemate\fourier
clear
clf
x=linspace(-pi,pi);
y0=1/2;
y1=y0+(2/pi)*cos(x);
y3=y1-(2/pi)*cos(3*x)/3;
y5=y3+(2/pi)*cos(5*x)/5;
y7=y5-(2/pi)*cos(7*x)/7
plot([-pi -pi/2 -pi/2 pi/2 pi/2 pi],[0 0 1 1 0 0])
ylim([-0.2 1.2])
hold on
grid
plot(x,y0*ones(size(x)),'--')
plot(x,y1,'g')
plot(x,y3,'r')
plot(x,y5,'y')
plot(x,y7,'m')
title('Fourier-osasummat 0,1,3,5,7')
shg
```

4. Tietokoneteht. Gibbsin ilmiö. Tutki luentodemotiedostoa demogibbs.m

   Tee sen pohjalta m-tiedosto, jolla havainnollista Gibbsin ilmiötä ja Fourier-sarjojen suppenemis- käytöstä. Kerää maksimikohdat ja -arvot kaikista osasummista (esim. 1 .. 20), sijoita ne vektoreihin maxkohdat, maxarvot ja näytä vierekkäin:

   `[maxkohdat' maxarvot']`

   Selitä omin sanoin, Fourier-sarjan suppenemiskäytöstä (pisteittäinen suppeneminen, tasainen suppeneminen (tai sen puute), Gibbsin ilmiö).

Piirrä funktion $f(x) = \cos x, \quad x \in [0, \pi]$ parittoman laajennuksen kuvaaja välillä $[-\pi, \pi]$ ja kehitä se *Fourier*-sarjaksi, ts. muodosta f:n sinisarja.

Kirjoita auki sarjan osasumma, jossa on termit $\sin 6x$:ään saakka.

Ratkaisu:

Pariton laajennus määritellään: $f_o(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0 \\ -\cos x, & x < 0. \end{cases}$

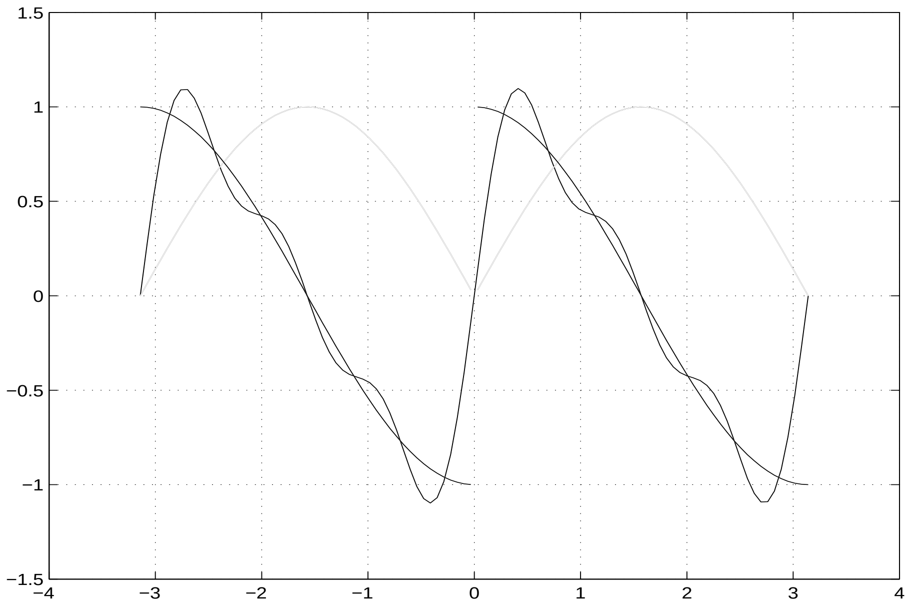
Koska integroitava on pariton, ja pariton $\times$ parillinen = pariton, ja pariton funktio integroituna origon suhteen symmetrisen välin yli antaa 0:n, ovat Fourier-sarjan cos-termien kertoimet (ja vakiokerroin) 0, eli $a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$.

Koska pariton $\times$ pariton = parillinen, saadaan b_n-kertoimet kertomalla 2:lla välin $[0, \pi]$ yli otettu integraali, eli

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Integrointi:

$$\begin{cases} \sin(nx + x) = \sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x) \\ \sin(nx - x) = \sin(nx)\cos(x) - \cos(nx)\sin(x) \end{cases}$$



Kuva 5. cos:n pariton jatko ja sinisarjan osasumma

Yhteenlaskemalla: $\sin(nx + x) + \sin(nx - x) = 2\,\sin(nx)\cos(x)$, joten integroinnissa tarvitsee vain katsoa, että sisäfunktion derivaatta tulee oikein. Koska siinä tulee jako $n-1$:llä, täytyy tapaus $n = 1$ käsitellä erikseen. Jätetään integroinnin yksityiskohdat lukijalle ja annetaan tulokset.

Jos $n > 1$, saadaan

$b_n = 2\,\frac{(\cos(\pi\,n)+1)n}{\pi\,(n+1)(n-1)} = 2\,\frac{((-1)^n+1)n}{\pi\,(n^2-1)}$

Tapauksessa $n = 1$, tulee: $b_1 = 0$. Siispä sarja saadaan muotoon:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2\,\frac{((-1)^n + 1)\,n\sin(nx)}{\pi\ (n^2-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 8\,\frac{k\sin(2\,kx)}{\pi\ (4\,k^2-1)}$$

Jälkimmäinen lauseke seuraa merkitsemällä $n = 2k$, ja ottamalla huomioon, että parittomilla n:n arvoilla $b_n = 0$.

Kysytty osasumma on siten: $8/3\,\frac{\sin(2\,x)}{\pi} + \frac{16}{15}\,\frac{\sin(4\,x)}{\pi} + \frac{24}{35}\,\frac{\sin(6\,x)}{\pi}$. Piirretään samantien:

```
>> x=linspace(-pi,pi);
>> b=[8/3 16/15 24/35]/pi;
>> S=b(1)*sin(2*x)+b(2)*sin(4*x)+b(3)*sin(6*x);
>> plot(x,S); shg
>> grid
>> hold on
>> xv=x(x<0);
>> xo=x(x>=0);
>> plot(xv,-cos(xv),'r',xo,cos(xo),'r')
```

Viitteet

[BN01] A[lbert] Boggess and F[rancis] Narchowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. Prentice Hall, 2001.
[C+01] A. Croft et al. *Engineering Mathematics*. Prentice Hall, 2001.
[J+99] Glyn James et al. *Advanced Engineering Mathematics*. Addison Wesley, 1999.
[Kre99] E[rwin] Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, eighth edition, 1999.
[M.D88] Greenberg M.D. *Advanced Engineering Mathematics*. Prentice Hall, 1 edition, 1988.
[Rud74] W[alter] Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw Hill, 1974.
[TW98] A[slak] Tveito and R[agnar] Winther. *Introduction to Partial Differential Equations – A Computational Approach*. Springer, 1998.

[Rud74], [Kre99, Luku 10],[J+99, Luku] ,[C+01, Luku 23], [BN01, Luku 1] ,[M.D88, Luku 10], [TW98,]