

## 1. Kanta, dimensio

Lay 2.9, 4.5, 4.6

[http://math.tkk.fi/opetus/k3/03/L/LA2.html#Kanta ja dimensio](http://math.tkk.fi/opetus/k3/03/L/LA2.html#Kanta%20ja%20dimensio)

KRE 7.5. s. 354

Ajattelemme  $\mathbb{R}^n$ :n aliavaruutta  $H$ . Aivan samat päättelyt pätevät yleisemminkin mielivaltaisessa ("äärellisulotteisessa") vektoriavaruudessa.

- **Kanta** Vektorijoukko, joka virittää ja on LRT.
- **LA2/Lause 1** Esitys kannan avulla on yksikäsitteinen.
- **LA2/Lause 2** Avaruuden  $H$  jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.
- **LA2/Määritelmä (dimensio)** Kannan (minkä tahansa) vektorien lukumäärä.

### Kannaksi laajentaminen ja karsiminen

- **LA2/Lemma 1 (LRT-lemma)** Jos vektorijoukko  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset H$  on LRT ja jokin  $\vec{v} \in H$  ei ole näiden lineaarikombinaatio, niin joukko  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}\}$  on LRT. (Vrt. Lay 4.3 Theorem 5 (The spanning set theorem))
- **LA2/Lause (kannaksi laajentaminen)** Aliavaruuden  $H \subset \mathbb{R}^n$  LRT joukko voidaan laajentaa  $H$ :n kannaksi.  
Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. □
- **LA2/Lause (kannaksi karsiminen)** Aliavaruuden  $H \subset \mathbb{R}^n$  virittävä joukko voidaan karsia  $H$ :n kannaksi.  
Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. □
- **Lay 4.5 s. 259/The basis theorem (kantalause)**  
Olkoon  $H$   $p$ -dimensioinen (ali)avaruus.
  1. Jokainen  $p$ :n vektorin LRT joukko on  $H$ :n kanta.
  2. Jokainen  $p$ :n vektorin virittävä joukko on  $H$ :n kanta.

**Tod:** 1. Olkoon  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$  LRT. Jos se ei virittäisi, voitaisiin se laajentaa  $H$ :n kannaksi. Ristiriita lauseen 2 kanssa.  
2. Virittäköön  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$   $H$ :n. Jos se ei olisi LRT, se voitaisiin karsia kannaksi, jälleen ristiriita lauseen 2 kanssa.  
(Molemmissa päättelyissä pärjätään LRT-lemmalla, yksi askel riittää.) □

### Rangi, nulliteetti, peruslause

Perjantain (10.11.) luennolla ratkaistiin eräs  $A\vec{x} = \vec{0}$  ja muodostettiin nolla-avaruuden  $N(A)$  kanta. Kertaukseksi vaikka LA3:n alku ("Nolla-avaruus").

Nähtiin, että  $N(A)$  :n kantavektoreita on yhtä monta kuin vapaita muuttujia.

Avaruus	Dimensio
Nolla-avaruus $N(A)$	nulliteetti, $n(A)$
Sarakeavaruus $\text{col}(A)$	rangi, $r(A)$
Riviavaruus $\text{row}(A)$	rangi, $r(A)$

## Sarakevaruus ja sen dimensio

Viimeksi (pe) laskettiin ja todettiin:

1. Rivioperaatioissa sarakkeiden LRT/LRV-käytös säilyy.
2. Tukisarakkeet ovat LRT.
3. Ei-tukisarake voidaan lausua tukisarakkeiden lineaarikombinaationa.
  1. Lausutaan LRT/LRV-vektoriyhtälö rivimuodossa  $A\vec{c} = \vec{0}$ . Ratkaisut säilyvät samoina rivioperaatioissa, ja sitten vaan takaisin vektorimuotoon.
  2. Irrotetaan tukisarakkeet omaksi matrisikseen. Silloin kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita ja siis (HY):n ratkaisu on yksikäsitteinen. (Tai päätellään ihan suoraan "takaisinsijoittamalla".)
  3. Irrotetaan matriisista tukisarakkeet kerroinmatriisiksi ja sijoitetaan haluttu mielivaltaisesti valittu ei-tukisarake yhtälösystemin oikeaksi puoleksi. No, systeemi on konsistentti, kun viimeinen sarake ei ole tukisarake, joten ko. ei-tukisarake on tukisarakkeiden lineaarikombinaatio.

## Riviavaruus

**Lause** Jos  $A$  ja  $B$  ovat riviekvivalentit, niin  $\text{row}(A) = \text{row}(B)$ .

**Tod:** Koska  $B$  :n rivit ovat  $A$  :n rivien lineaarikombinaatioita, niin  $B$  :n rivivektorit kuuluvat viritelmään  $\text{row}(A)$ , joten myös  $\text{row}(B) \subset \text{row}(A)$ . Mutta aivan yhtä hyvin kääntäen.  $\square$

**Lause** Riviavaruuden kannan muodostavat  $\text{ref}(A)$ :n nollasta poikkeavat (siis tuki-)rivit. Siten todellakin rivi- ja sarakevaruuksilla on sama dimensio.

**Tod:** Tukirivit ovat LRT aivan samalla päättelyllä kuin tukisarakkeet. (Tukirivit ovat transpoosin tukisarakkeita.) Tukirivit ovat siis sekä LRT että virittävät (edellisen perusteella), ja muodostavat siten  $\text{row}(A)$ :n kannan.

**Huom!** Rivioperaatioissa rivivektoreille säilyy viritys, muttei LRT. Rivioperaatioissa sarakevektoreille säilyy LRT, muttei viritys.

**Yhteenveto laskentaan:**

$N(A)$ : Ratkaistaan  $A\vec{x} = \vec{0}$ , kantavekt.: Yksi kutakin vap. muutt. kohti  
 $\text{col}(A)$ : Kanta: Tukisarakkeet poimitaan **alkuperäisestä** matriisista (ref-muodon vastaavat eivät yleensä viritä).  
 $\text{row}(A)$ : Kanta: ref-muodon ei-nollarivit.  
(Alkuperäisen vastaavat eivät välttämättä LRT.)

Edellisen perusteella meille putoaa:

**Lause**[Rangilause] (KRE s. 333 Thm 1) Matriisin  $A$  rangi  $r(A)$  (joka määritellään sarakevaruuden dimensioksi) = riviavaruuden dimensio. Toisin sanoen matriisin rangi on

$$\text{maksimi määrä LRT sarakkeita} = \text{maks määrä LRT rivejä.}$$

Erityisesti neliömatriisilla pätee: Rivit LRT  $\iff$  sarakkeet LRT.

(Tätä olen usein kutsunut "lineaarialgebran ihmeeksi".)  $\square$

**Lause**[Lineaarialgebran peruslause]

Olkoon  $A$  ( $m \times n$ )-matriisi.

$$n(A) + r(A) = n.$$

Tod: Tämäkin on jo perusteltu. Kerran vielä; sarakkeita on kahdenlaisia: tukisarakkeita ja ei-tuki- eli vapaiden muuttujien sarakkeita.  $\square$

## Neliömatriisit: Determinantit ja käänteismatriisi

A olkoon  $(n \times n)$  neliömatriisi

**Determinantit**, kts. <http://math.tkk.fi/opetus/k3/04/L/DetInv.pdf>

Determinantin kehittämislaskelma,  $25 \times 25$ -matriisi. Kertolaskuja  $\sim 25!$ .

Gaussilla  $\sim 25^3$

```
octave:23> oper=factorial(25)
oper = 1.5511e+25
octave:22> tera=10^12;
octave:25> sek=oper/tera
sek = 1.5511e+13
octave:27> vuosia=sek/3600/24/365
vuosia = 4.9186e+05 % n. 500 000 vuotta
octave:28> gauss=25^3
gauss = 15625
octave:29> gauss/tera
ans = 1.5625e-08 % Gaussilla hujauttaa 1/(100 000 000) sekunnissa.
```

*Algoritmillä on väliä!*

## Käänteismatriisi

**Määr:**  $A(n \times n)$  on kääntyvä, (ei-singulaarinen, säännöllinen), jos on olemassa  $B(n \times n)$  siten että

$$AB = BA = I,$$

missä  $I$  on  $n \times n$ -yksikkömatriisi. Merk  $B = A^{-1}$ .

**Huom:** Jos  $\exists A^{-1}$ , niin se on yksikäsitteinen: Olkoot  $B$  ja  $C$  kaksi käänteismatriisia.

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

.

**Lause 1** [Kääntyvyys ja rangi] □

$$A \text{ on kääntyvä} \iff r(A) = n$$

**Tod:** 1. Oletetaan kääntyvyys. Tarkastellaan (HY):ä  $A\vec{x} = \vec{0}$ . Kerrotaan puolittain  $A^{-1}$ :llä, ja saadaan:  $x = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ . Siis (HY):llä vain triv. ratk (ja ratk. siis yksikäsitteinen), joten jokainen sarake on tukisarake.

2. Oletetaan:  $r(A) = n$ . Tällöin yhtälöllä  $A\vec{x} = \vec{b}$  on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ . (Matriisin sarakkeet muodostavat  $\mathbb{R}^n$ :n kannan.)

Valitaan  $\vec{b} = \vec{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Ratkaisuvektorit  $\vec{x}_j$  ladotaan sarakkeiksi:  $X = [\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n]$ .

Tällöin  $AX = I$ .

Onko myös  $XA = I$ ?

Yksityiskohdat luennolla. □

**Huom!** Edellisestä todistuksesta seuraa: Toinen ehdoista  $AB = I$  tai  $BA = I$  riittää käänteismatriisille.

**Lause 2** [Kääntyvyys ja determinantti]

$$A \text{ on kääntyvä} \iff \det(A) \neq 0.$$

**Tod:** Riviooperaatiot eivät muuta rangia eivätkä determinantin 0-käytöstä.

$r(A) = n \iff \text{ref}(A)$ :n kaikki sarakkeet tukisarakkeita  $\iff \text{ref}(A)$ :n kaikki diagonaalialkiot  $\neq 0 \iff \det(A) \neq 0$ .

$\det(A) = C d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n$ ,  $C \neq 0$ .

**Lause 3**[Tulo ja transpoosi]

1. Jos  $A$  on kääntyvä, niin myös  $A^{-1}$  on kääntyvä ja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2. Jos  $A$  ja  $B$  kääntyviä, niin  $AB$  kääntyvä ja  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

3. Jos  $A$  on kääntyvä, niin myös  $A^T$  on kääntyvä ja  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**Tod.** Kerrotaan vaikka oikealta ko. "kandidaatilla"

Nyt voidaan koota sopiva versio "käänteismatriisilauseeksi".

**Käänteismatriisilause** (Layssa monta versiota eri paikoissa)

Seuraavat ovat yhtäpitävät ( $A(n \times n)$ ):

1.  $A$  on kääntyvä
2.  $r(A) = n$
3.  $\det(A) \neq 0$
4.  $N(A) = \{0\}$  ( $n(A) = 0$ )
5.  $A$ :n sarakkeet ovat LRT ( $\iff$ ) virittävät  $\mathbb{R}^n : n$
6.  $A$ :n rivit ovat LRT ( $\iff$ ) virittävät  $\mathbb{R}^n : n$
7. (HY):llä  $A\vec{x} = \vec{0}$  vain triviaaliratk.  $\vec{x} = \vec{0}$
8. (EHY):llä  $A\vec{x} = \vec{b}$  on ratkaisu  $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

### Käänteismatriisikaavat ja laskenta

Determinanttien avulla voidaan esittää kaunis ratkaisukaava käänteismatriisille ja yhtälösystemille. Pienillä  $n$  ( $n = 2, n = 3$ ) voivat olla käteviä. Suuremmilla hyödyttömiä. (Ellei ole aikaa odotella 500000 vuotta.)

Tarvitaanko käänteismatriisin laskemista?

Yleensä ei! Käänteismatriisi on teoreettisena välineenä hyödyllinen matriisilausekkeissa. Käytännössä sitä voitaisiin soveltaa yhtälösystemin ratkaisukaavana  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ . Mutta tämä on tehotonta ja numeerisesti epätarkempaa kuin suora ratkaisu.

Entä, jos oikeita puolia on paljon? No ei silloinkaan, vaan esim. LU-hajotelma.