1.8 Lineaarikuvaukset, johdatus

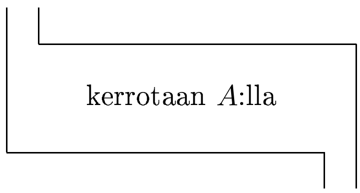
Toinen tapa katsoa yhtälöä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Matriisi A on objekti, joka operoi argumenttivektoriin $\mathbf{x}$ matriisikertolaskun välityksellä. Tuloksena on uusi vektori $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Esim:

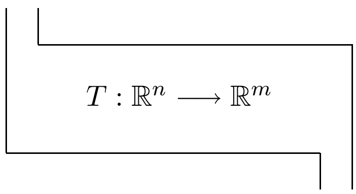
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Olkoon A $(m \times n)$. Yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaiseminen tarkoittaa kaikkien vektorien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ etsimistä, jotka kuvautuvat vektorille $\mathbf{b}$ matriisilla A kerrottaessa.



transformaatio
"*kone*"

Matriisikuvaukset **Kuvaus (funktio)** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sääntö, joka liittää jokaiseen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorin $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.



Kuvaustermejä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**

$\mathbb{R}^n$ – **määrittelyjoukko** $\mathbb{R}^m$ – **maalijoukko**
$T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ on $\mathbf{x}$:n **kuva** kuvauksessa T.
Kaikkien kuvien $T(\mathbf{x})$ joukko on T :n **kuvajoukko**, **"range"**

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$; $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Jos vaikkapa $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, niin $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a. Määritä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$.

b. Onko useampia kuin yksi $\mathbf{x}$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$. *(yksikäsitteisyysongelma)*

c. Selvitä, onko $\mathbf{c}$ kuvauksen T kuvajoukossa. *(olemassaolo-ongelma)*

Ratkaisu: (a) Ratkaise $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x}$:n suhteen, ts.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -15 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2 \\ x_2 \text{ on vapaa} \\ x_3 \text{ on vapaa} \end{array}$$

Valitaan jotkin arvot vapaille muuttujille, vaikkapa: Olkoot $x_2 = -1$ ja $x_3 = 0$. Silloin $x_1 = 0$.

Ja siis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (Valinnanvaraa on todella paljon, kokonainen "tasollinen".)

(b) Onko olemassa $\mathbf{x}$ jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?

$$\text{Vapaita muuttujia on} \quad \Longrightarrow \quad \text{On olemassa useita } \mathbf{x} \text{ joille } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

(c) Onko olemassa $\mathbf{x}$, jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$? Ts. onko $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$

Kun $\mathbf{c}-$vektorille tehdään asianmukainen rivioperaatio (kerrotaan 1. alkio 5 :llä ja lisätään toiseen (0:aan), saadaan $15 (\neq 0)$, joten ratkaisua ei ole.

Huomaa, että (b)- ja (c)-kohdat voitaisiin ratkaista yhtäaikaa laittamalla molemmat sarakkeiksi liitännäismatriisin loppuun.

Matriisikuvauksilla on monia sovelluksia - esimerkiksi *tietokonegrafiikassa*.

Esim 1: $A = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$. Kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on esimerkki **kontraktio**kuvauksesta.

Jos $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, niin

$$A\mathbf{x} = 0.5\,\mathbf{x}.$$

Miten kuvautuu O-keskinen ympyrä?

Miten kuvautuu yksikköneliö , jonka kärki on origossa?

Jne.

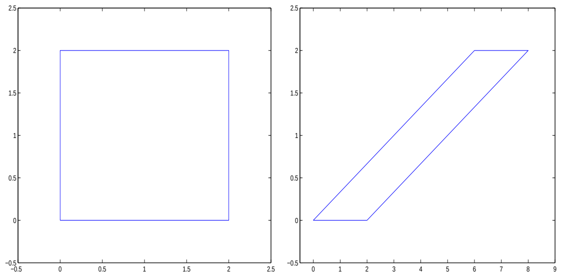
Esim 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, niin $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}^3$:n pisteen $\mathbf{x}$ projektio x_1x_2- tasoon,

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, x_2]$$

Esim 3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x_2-koordinaatti pysyy samana, x_1-koordinaatti liukuu.



Matlab/Octave-sessio

```
>> nx=[0 2 2 0 0];ny=[0 0 2 2 0];
>> plot(nx,ny)
>> axis([-.5 2.5 -.5 2.5])
>> nelio=[nx;ny]

nelio =

     0     2     2     0     0
     0     0     2     2     0

>> kuva=A*nelio

kuva =

     0     2     8     6     0
     0     0     2     2     0

>> figure;plot(kuva(1,:),kuva(2,:))
>> axis([-.5 9 -.5 2.5])
```

Tämäntyyppinen kuvaus on nimeltään "shear", "leikkaus" tai ehkä "liu'utus". Sovellusalueita: Fysiikka yleisesti, geologia, kristallografia.

Lineaarikuvaukset Jos A on $m \times n$, niin matriisikuvauksella $T\,(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on seuraavat ominaisuudet:

$$T\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\,\mathbf{u} + A\,\mathbf{v}.$$

$$= \mathbf{T}\,\mathbf{u} + \mathbf{T}\,\mathbf{v}$$

$$T\,(c\mathbf{u}) = A\,(c\mathbf{u}) = c\,A\mathbf{u} = c\,T\,(\mathbf{u})$$

kaikilla $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla skalaareilla c.

Määritelmä

Kuvaus T on **lineaarinen** jos:

i. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ T:n määrittelyjoukossa.

ii. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ kaikilla $\mathbf{u}$ T:n määrittelyjoukossa ja kaikilla skalaareilla c.

Jokainen matriisikuvaus on **lineaarinen** .

Ominaisuuksia Jos T on lineaarikuvaus, niin

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \text{ja} \qquad T(c\mathbf{u}+d\mathbf{v}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u}) + d\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Perustelu:

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = 0\,T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$
$$T(c\mathbf{u}+d\mathbf{v}) = T(c\,\mathbf{u}) + T(d\,\mathbf{v}) = c\,T(\mathbf{u}) + d\,T(\mathrm{v}\ )$$

Lineaarikuvausteema ei pääty tähän, mutta kalvosarja ja vastaavat prujut päättyvät (toistaiseksi).