1.3 Vektoriyhtälöt

Avainkäsitteet: Vektorien **lineaarikombinaatio** , **virittävä joukko, viritelmä**

Vektori: $\vec{v} = [v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$
(Usein ajatellaan vektori pystyvektorina, siksi tuo ^{T}.)

Lineaarikombinaatiot:

Olkoon annettu vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ ja skalaarit $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Vektori $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

on vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ lineaarikombinaatio, (paino)kertoimin $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

ESIM: Olkoot $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Esitä piirroksen avulla kukin alla oleva vektori $\mathbf{v}_1$:n ja $\mathbf{v}_2$: n lineaarikombinaationa

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ESIM:

Olkoot $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Selvitä, onko $\mathbf{b}$ vektorien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ja $\mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatio.

Ratkaisu: Vektori $\mathbf{b}$ on vektorien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ja $\mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatio, jos löydetään luvut x_1, x_2, x_3 siten että

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

Vektoriyhtälö (*):

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 14x_2 & + & 10x_3 & = & -5 \end{array}$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Siis:

Ratkaisu vektoriyhtälölle

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

saatiin ratkaisemalla lineaarinen systeemi, jonka liitännäismatriisi:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{array} \end{array}$$

Riviajattelu vs. sarakeajattelu

Yllä oleva lasku (yhtälön vasen puoli) voidaan ilmaista myös näin:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = A\,\mathbf{x},$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

Vektorimuoto vs. matriisimuoto yleisesti

Vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

on samat ratkaisut kuin lineaarisella systeemillä, jonka liitännäismatriisi on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Erityisesti $\mathbf{b}$ voidaan lausua lineaarikombinaationa vektoreista $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$

jos ja vain jos

lineaarisella systeemillä, jonka liitännäismatriisi on yllä, on ratkaisuja $(x_1, \ldots x_n)$

Määritelmä: Vektorijoukon viritelmä ("span")

Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ $\mathbb{R}^n$:n vektoreita.

$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ = vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ kaikkien lineaarikombinaatioiden joukko.

Toisin sanoen: $\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ on kaikkien vektorien joukko, jotka voidaan lausua muodossa

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p$$

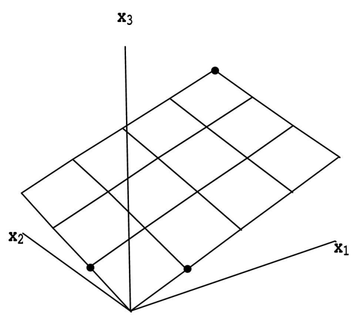
missä $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ovat skalaareja.

ESIMERKKI: Olkoon $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Määritä jokin vektori joukossa $\mathbf{sp}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(b) Luonnehdi $\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ geometrisesti.

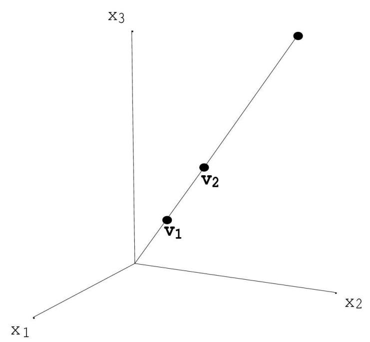
ESIMERKKI: Merkitse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ja $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ oheiseen kuvaan.



$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ja $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$

$\mathbf{sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ on muotoa $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$ olevien vektorien joukko, tässä O:n kautta kulkeva taso.

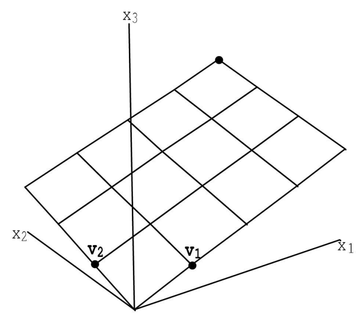
Virittäviä joukkoja $\mathbb{R}^3$:ssa



$\mathbf{v}_2$ on $\mathbf{v}_1$:n monikerta

$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1\} = \mathbf{sp}\{\mathbf{v}_2\}$

(origon kautta kulkeva suora)



$\mathbf{v}_2$ ei ole $\mathbf{v}_1$:n kerrannainen

$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ = origon kautta kulkeva taso

ESIMERKKI: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$. Matriisin A sarakevektorit virittävät tason. Onko $\mathbf{b}$ tässä tasossa?

Ratkaisu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Onko olemassa x_1 ja x_2 siten, että ___

Corresponding augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -21 \\ 0 & 5 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Siis $\mathbf{b}$ ei ole A:n sarakevektorien virittämässä tasossa.