L 6, ti 14.11.06

1. Kanta, dimensio

Lay 2.9, 4.5, 4.6

`http://math.tkk.fi/opetus/k3/03/L/LA2.html#Kanta ja dimensio`

KRE 7.5. s. 354

Ajattelemme $\mathbb{R}^n$:n aliavaruutta H. Aivan samat päättelyt pätevät yleisemminkin mielivaltaisessa ("äärellisulotteisessa") vektoriavaruudessa.

- **Kanta** Vektorijoukko, joka virittää ja on LRT.
- **LA2/Lause 1** Esitys kannan avulla on yksikäsitteinen.
- **LA2/Lause 2** Avaruuden H jokaisessa kannassa on yhtä monta vektoria.
- **LA2/Määritelmä (dimensio)** Kannan (minkä tahansa) vektorien lukumäärä.

Kannaksi laajentaminen ja karsiminen

- **LA2/Lemma 1 (LRT-lemma)** Jos vektorijoukko $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\} \subset H$ on LRT ja jokin $\vec{v} \in H$ ei ole näiden lineaarikombinaatio, niin joukko $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p, \vec{v}\}$ on LRT.
  (Vrt. Lay 4.3 Theorem 5 (The spanning set theorem)
- **LA2/Lause (kannaksi laajentaminen)** Aliavaruuden $H \subset \mathbb{R}^n$ LRT joukko voidaan laajentaa H:n kannaksi.
  Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. $\square$
- **LA2/Lause (kannaksi karsiminen)** Aliavaruuden $H \subset \mathbb{R}^n$ virittävä joukko voidaan karsia H:n kannaksi.
  Tod: Käytetään (toistuvasti) LRT-lemmaa. $\square$
- **Lay 4.5 s. 259/The basis theorem (kantalause)**
  Olkoon H $p-$dimensioinen (ali)avaruus.
  1. Jokainen p:n vektorin LRT joukko on H:n kanta.
  2. Jokainen p:n vektorin virittävä joukko on H:n kanta.

Tod: 1. Olkoon $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ LRT. Jos se ei virittäisi, voitaisiin se laajentaa H:n kannaksi. Ristiriita lauseen 2 kanssa.
2. Virittäköön $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ H:n. Jos se ei olisi LRT, se voitaisiin karsia kannaksi, jälleen ristiriita lauseen 2 kanssa.
(Molemmissa päättelyissä pärjätään LRT-lemmalla, yksi askel riittää.) $\square$

Rangi, nulliteetti, peruslause

Perjantain (10.11.) luennolla ratkaistiin eräs $A\,\vec{x} = \vec{0}$ ja muodostettiin nolla-avaruuden N(A) kanta. Kertaukseksi vaikka LA3:n alku ("Nolla-avaruus").

Nähtiin, että $N(A)$:n kantavektoreita on yhtä monta kuin vapaita muuttujia.

Avaruus	Dimensio
Nolla-avaruus N(A)	nulliteetti, $n(A)$
Sarakeavaruus col(A)	rangi, $r(A)$
Riviavaruus row(A)	rangi, $r(A)$

Sarakeavaruus ja sen dimensio

Viimeksi (pe) laskettiin ja todettiin:
1. Rivioperaatioissa sarakkeiden LRT/LRV-käytös säilyy.
2. Tukisarakkeet ovat LRT.
3. Ei-tukisarake voidaan lausua tukisarakkeiden lineaarikombinaationa.

1. Lausutaan LRT/LRV-vektoriyhtälö rivimuodossa $A\,\vec{c} = \vec{0}$. Ratkaisut säilyvät samoina rivioperaatioissa, ja sitten vaan takaisin vektorimuotoon.
2. Irrotetaan tukisarakkeet omaksi matrisikseen. Silloin kaikki sarakkeet ovat tukisarakkeita ja siis (HY):n ratkaisu on yksikäsitteinen. (Tai päätellään ihan suoraan "takaisinsijoittamalla".)
3. Irrotetaan matriisista tukisarakkeet kerroinmatriisiksi ja sijoitetaan haluttu mielivaltaisesti valittu ei-tukisarake yhtälösysteemin oikeaksi puoleksi. No, systeemihän on konsistentti, kun viimeinen sarake ei ole tukisarake, joten ko. ei-tukisarake on tukisarakkeiden lineaarikombinaatio.

Riviavaruus

Lause Jos A ja B ovat riviekvivalentit, niin $\mathrm{row}(A) = \mathrm{row}(B)$.

Tod: Koska B :n rivit ovat A :n rivien lineaarikombinaatioita, niin B :n rivivektorit kuuluvat viritelmään row(A), joten myös row(B) $\subset$ row(A). Mutta aivan yhtä hyvin kääntäen. $\square$

Lause Riviavaruuden kannan muodostavat ref(A):n nollasta poikkeavat (siis tuki-)rivit. Siten todellakin rivi- ja sarakeavaruuksilla on sama dimensio.

Tod: Tukirivit ovat LRT aivan samalla päättelyllä kuin tukisarakkeet. (Tukirivit ovat transpoosin tukisarakkeita.) Tukirivit ovat siis sekä LRT että virittävät (edellisen perusteella), ja muodostavat siten row(A):n kannan.

Huom! Rivioperaatioissa rivivektoreille säilyy viritys, muttei LRT. Rivioperaatioissa sarakevektoreille säilyy LRT, muttei viritys.

Yhteenveto laskentaan:

N(A): Ratkaistaan $A\vec{x} = \vec{0}$, kantavekt.: Yksi kutakin vap. muutt. kohti

col(A): Kanta: Tukisarakkeet poimitaan **alkuperäisestä** matriisista (ref-muodon vastaavat eivät yleensä viritä).

row(A): Kanta: ref-muodon ei-nollarivit. (Alkuperäisen vastaavat eivät välttämättä LRT.)

Edellisen perusteella meille putoaa:

Lause[Rangilause] (KRE s. **333** Thm 1) Matriisin A rangi $r(A)$ (joka määritellään sarakeavaruuden dimensioksi) = riviavaruuden dimensio. Toisin sanoen matriisin rangi on

$$\text{maksimi määrä LRT sarakkeita} = \text{maks määrä LRT rivejä.}$$

Erityisesti neliömatriisilla pätee: Rivit LRT $\iff$ sarakkeet LRT.
(Tätä olen usein kutsunut "lineaarialgebran ihmeeksi".) $\square$

Lause[Lineaarialgebran peruslause]
Olkoon A $(m \times n)$-matriisi.

$$n(A) + r(A) = n.$$

Tod: Tämäkin on jo perusteltu. Kerran vielä; sarakkeita on kahdenlaisia: tukisarakkeita ja ei-tuki- eli vapaiden muuttujien sarakkeita. $\square$

Neliömatrisiit: Determinantit ja käänteismatriisi

A olkoon $(n \times n)$ *neliömatriisi*

Determinantit, kts. `http://math.tkk.fi/opetus/k3/04/L/DetInv.pdf`

Determinantin kehittämislaskelma, $25 \times 25-$matriisi. Kertolaskuja $\sim 25!$.
Gaussilla $\sim 25^3$

```
octave:23> oper=factorial(25)
oper =  1.5511e+25
octave:22> tera=10^12;
octave:25> sek=oper/tera
sek =  1.5511e+13
octave:27> vuosia=sek/3600/24/365
vuosia =  4.9186e+05    % n. 500 000 vuotta
octave:28> gauss=25^3
gauss = 15625
octave:29> gauss/tera
ans =  1.5625e-08      % Gaussilla hujahtaa 1/(100 000 000) sekunnissa.
```

Algoritmillä on väliä!

Käänteismatriisi

Määr: $A(n \times n)$ on kääntyvä, (ei-singulaarinen, säännöllinen), jos on olemassa $B(n \times n$ siten että

$$A\,B = B\,A = I,$$

missä I on $\vec{n} \times n-$yksikkömatriisi. Merk $B = A^{-1}$.

Huom: Jos $\exists A^{-1}$, niin se on yksikäsitteinen: Olkoot B ja C kaksi käänteismatriisia.

$$B = I\,B = (C\,A)B = C(A\,B) = C\,I = C$$

. $\square$

Lause 1[Kääntyvyys ja rangi]

$$A \text{ on kääntyvä} \iff r(A) = n$$

Tod: 1. Oletetaan kääntyvyys. Tarkastellaan (HY):ä $A\,\vec{x} = \vec{0}$. Kerrotaan puolittain A^{-1} :llä, ja saadaan: $x = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. Siis (HY):llä vain triv. ratk (ja ratk. siis yksikäs), joten jokainen sarake on tukisarake.

2. Oletetaan: $r(A) = n$. Tällöin yhtälöllä $A\,\vec{x} = \vec{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu kaikilla $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. (Matriisin sarakkeet muodostavat $\mathbb{R}^n$:n kannan.)

Valitaan $\vec{b} = \vec{e}_j, \quad j = 1, \ldots, n.$

Ratkaisuvektorit $\vec{x}_j$ ladotaan sarakkeiksi: $X = [\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n]$.

Tällöin $A\,X = I$.
Onko myös $X\,A = I$?

Yksityiskohdat luennolla. $\square$

Huom! Edellisestä todistuksesta seuraa: Toinen ehdoista $A\,B = I$ tai $B\,A = I$ riittää käänteismatriisille.

Lause 2 [Kääntyvyys ja determinantti]

$$A \text{ on kääntyvä} \iff \det(A) \neq 0.$$

Tod: Rivioperaatiot eivät muuta rangia eivätkä determinantin 0−käytöstä.
$r(A) = n \iff$ ref(A):n kaikki sarakkeet tukisarakkeita $\iff$ ref(A):n kaikki

diagonaalialkiot $\neq 0 \iff \det(A) \neq 0$.

$\det(A) = C\, d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n, \quad C \neq 0$.

Lause 3[Tulo ja transpoosi]

1. Jos A on kääntyvä, niin myös A^{-1} on kääntyvä ja

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

2. Jos A ja B kääntyviä, niin $A\,B$ kääntyvä ja $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. Jos A on kääntyvä, niin myös A^T on kääntyvä ja $(A^T)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Tod. Kerrotaan vaikka oikealta ko. "kandidaatilla"

Nyt voidaan koota sopiva versio "käänteismatriisilauseeksi".

Käänteismatriisilause (Layssa monta versiota eri paikoissa)

Seuraavat ovat yhtäpitävät ($A(n \times n)$):

1. A on kääntyvä
2. $r(A) = n$
3. $\det(A) \neq 0$
4. $N(A) = \{0\}$ ($n(A) = 0$)
5. A:n sarakkeet ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
6. A:n rivit ovat LRT ($\iff$) virittävät $\mathbb{R}^n : n$
7. (HY):llä $A\,\vec{x} = \vec{0}$ vain triviaaliratk. $\vec{x} = \vec{0}$
8. (EHY):llä $A\,\vec{x} = \vec{b}$ on ratkaisu $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Käänteismatriisikaavat ja laskenta

Determinanttien avulla voidaan esittää kaunis ratkaisukaava käänteismatriisille ja yhtälösysteemille. Pienillä n ($n = 2, \quad n = 3$) voivat olla käteviä. Suuremmilla hyödyttömiä. (Ellei ole aikaa odotella 500000 vuotta.)

Tarvitaanko käänteismatriisin laskemista?
Yleensä ei! Käänteismatriisi on teoreettisena välineenä hyödyllinen matriisilausekkeissa. Käytännössä sitä voitaisiin soveltaa yhtälösysteemin ratkaisukaavana $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Mutta tämä on tehotonta ja numeerisesti epätarkempaa kuin suora ratkaisu.
Entä, jos oikeita puolia on paljon? No ei silloinkaan, vaan esim. LU-hajotelma.