1.8 Lineaarikuvaukset, johdatus

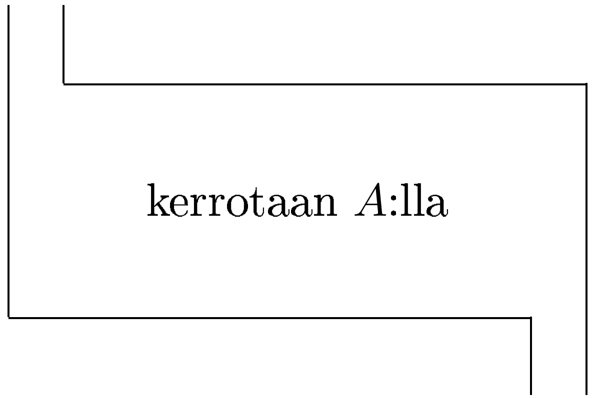
Toinen tapa katsoa yhtälöä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Matriisi A on objekti, joka operoi argumenttivektoriin $\mathbf{x}$ matriisikertolaskun välityksellä. Tuloksena on uusi vektori $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Esim:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

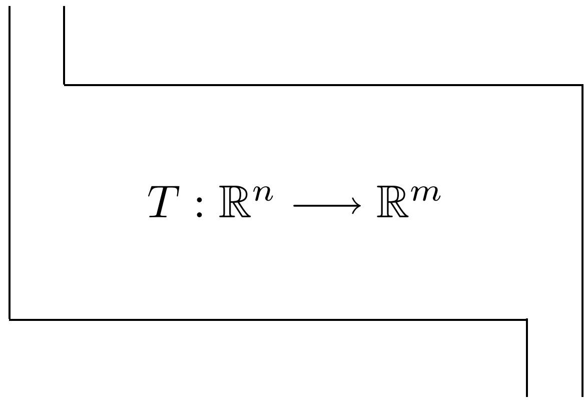
Olkoon A is $m \times n$. Yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaiseminen tarkoittaa kaikkien vektorien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ etsimistä, jotka kuvautuvat vektorille $\mathbf{b}$ matriisilla A kerrottaessa.



transformaatio

“kone”

Matriisikuvaukset **Kuvaus (funktio)** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sääntö, joka liittää jokaiseen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorin $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.



Kuvaustermejä $\quad T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**

$\mathbb{R}^n$ – **määrittelyjoukko** $\qquad$ $\mathbb{R}^m$ – **maalijoukko**

$T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ on $\mathbf{x}$:n **kuva** kuvauksessa T.

Kaikkien kuvien $T(\mathbf{x})$ joukko on T:n **kuvajoukko**, **"range"**

Esim: Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$; $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Jos vaikkapa $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, niin $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Määritellään kuvaus $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a. Määritä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$.

b. Onko useampia kuin yksi $\mathbf{x}$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$.
(yksikäsitteisyysongelma)

c. Selvitä, onko $\mathbf{c}$ kuvauksen T kuvajoukossa. *(olemassaolo-ongelma)*

Ratkaisu: (a) Ratkaise ____=___ $\mathbf{x}$:n suhteen. ts. ratkaise
________=______ tai

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -15 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2$

x_2 on vapaa

x_3 on vapaa

Valitaan jotkin arvot vapaille muuttujille: Olkoot $x_2 =$ ___ ja $x_3 =$ ___. Silloin $x_1 =$ ___.

$$\text{Ja siis } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

(b) Onko olemassa $\mathbf{x}$ jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?

Vapaita muuttujia on $\Longrightarrow$ On olemassa useita $\mathbf{x}$ joille $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

(c) Onko olemassa $\mathbf{x}$, jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$? Ts. onko $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$

No selvitä! Huomaa, että (b)- ja (c)-kohdat voitaisiin ratkaista yhtäaikaa laittamalla molemmat sarakkeiksi liitännäismatriisin loppuun.

Matriisikuvauksilla on monia sovelluksia - esimerkiksi *tietokonegrafiikassa.*

Esim 1: $A = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$. Kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on esimerkki **kontraktio**kuvauksesta.

Jos $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, niin

$$A\mathbf{x} = 0.5\,\mathbf{x}.$$

Miten kuvautuu O-keskinen ympyrä?
Miten kuvautuu yksikköneliö , jonka kärki on origossa?
Jne.

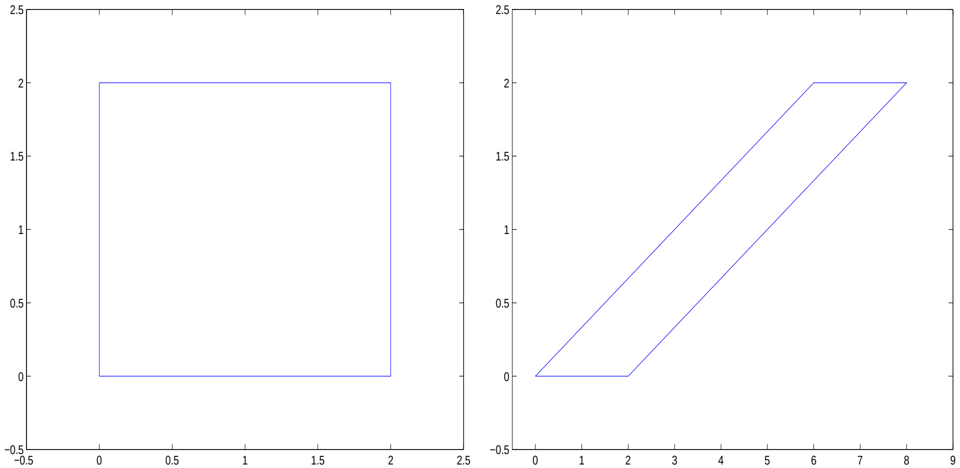
Esim 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, niin $A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}^3$:n pisteen $\mathbf{x}$ projektio $x_1 x_2-$ tasoon,

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, x_2]$$

Esim 3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x_2-koordinaatti pysyy samana, x_1-koordinaatti liukuu.



Matlab/Octave-sessio

```
>> nx=[0 2 2 0 0];ny=[0 0 2 2 0];
>> plot(nx,ny)
>> axis([-.5 2.5 -.5 2.5])
>> nelio=[nx;ny]
```

```
nelio =

     0     2     2     0     0
     0     0     2     2     0

>> kuva=A*nelio

kuva =

     0     2     8     6     0
     0     0     2     2     0

>> figure;plot(kuva(1,:),kuva(2,:))
>> axis([-.5 9 -.5 2.5])
```

Tämäntyyppinen kuvaus on nimeltään "shear", "leikkaus" tai ehkä "liu'utus". Sovellusalueita: Fysiikka yleisesti, geologia, kristallografia.

Lineaarikuvaukset Jos A on $m \times n$, niin matriisikuvauksella $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on seuraavat ominaisuudet:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\,\mathbf{u} + A\,\mathbf{v}.$$

$$= \_\_\_\_ + \_\_\_\_$$

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = \_\_\_A\mathbf{u} = \_\_\_T(\mathbf{u})$$

kaikilla $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla skalaareilla c.

Määritelmä

Kuvaus T on **lineaarinen** jos:

i. $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ for all $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ T :n määrittelyjoukossa.

ii. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ kaikilla $\mathbf{u}$ T:n määrittelyjoukossa ja kaikilla skalaareilla c.

$$\boxed{\text{Jokainen matriisikuvaus on } \textbf{lineaarinen}\text{ .}}$$

Ominaisuuksia Jos T on lineaarikuvaus, niin

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \text{ja} \qquad T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u}) + d\mathbf{T}(\mathbf{v}).$$

Perustelu:

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{u}) = \_\_T(\mathbf{u}) = \_\_\_.$$

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = T(\qquad\qquad) + T(\qquad\qquad) = \_\_\_\_\_T(\qquad\quad) + \_\_\_\_\_T(\qquad\quad)$$

EXAMPLE: Let $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Suppose $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ is a linear transformation which maps $\mathbf{e}_1$ into $\mathbf{y}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ into $\mathbf{y}_2$. Find the images of $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Solution: First, note that

$$T(\mathbf{e}_1) = \_\_\_\_\_\_\_ \qquad \text{ja} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \_\_\_\_\_\_\_.$$

Also

$$\_\_\_\mathbf{e}_1 + \_\_\_\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Then

$$T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = T(\_\_\_\mathbf{e}_1 + \_\_\_\mathbf{e}_2) = \_\_\_T(\mathbf{e}_1) + \_\_\_T(\mathbf{e}_2)$$

$$=$$

$$T\left(3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2\right) = 3T\left(\mathbf{e}_1\right) + 2T\left(\mathbf{e}_2\right)$$

Also

$$T\left(\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right]\right) = T\left(\_\_\_\_\_\_\mathbf{e}_1 + \_\_\_\_\_\_\mathbf{e}_2\right) =$$
$$\_\_\_\_\_T\left(\mathbf{e}_1\right) + \_\_\_\_\_T\left(\mathbf{e}_2\right) =$$

EXAMPLE: Define $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ such that $T(x_1, x_2, x_3) = (|x_1 + x_3|, 2 + 5x_2)$. Show that T is a not a linear transformation.

Solution: Another way to write the transformation:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} |x_1 + x_3| \\ 2 + 5x_2 \end{bmatrix}$$

Provide a **counterexample** - example where $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $T(c\mathbf{u}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u})$ or $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ is violated.

A counterexample:

$$T(\mathbf{0}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \quad\quad\quad\quad \end{bmatrix} \neq \_\_\_\_\_$$

which means that T is not linear.

Another counterexample: Let $c = -1$ ja $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Then

$$T(c\mathbf{u}) = T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} |-1 + -1| \\ 2 + 5(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

ja