Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II
Luentokalvojen tekstit
Lay: luvut 1.1–1.5,1.7,1.8
Heikki Apiola

Sisältää 1. viikon luentokalvojen tekstit, tyhjät kohdat täydentäen.

Lineaarialgebraa

1.1: Lineaarinen yhtälösysteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \tag{0.1}$$

Esimerkkejä epälineaarisista:

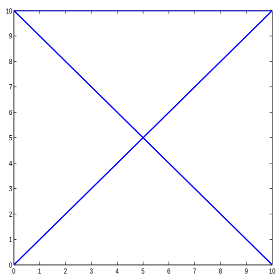
$$4x_1 - 6x_2 = x_1x_2 \qquad \text{tai} \qquad x_2 = 2\sqrt{x_1} - 7$$

Lineaarisen systeemin ratkaisu:

Lukujono (vektori) $(s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n$, joka toteuttaa yhtälösysteemin 0.1, kun sijoitetaan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

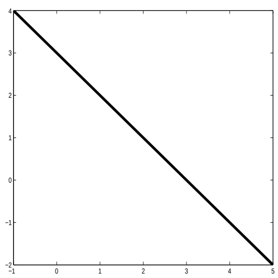
Tyyppiesimerkit 2×2 systeemeille

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 10 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}$$



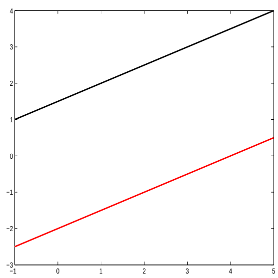
Yksi ratkaisu
konsistentti

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{array}$$



Äärettömän monta
konsistentti

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 8 \end{array}$$

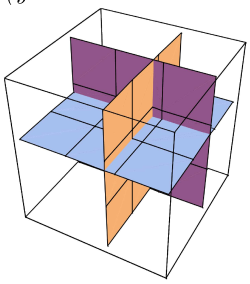


Ei ratkaisuja
epäkonsistentti

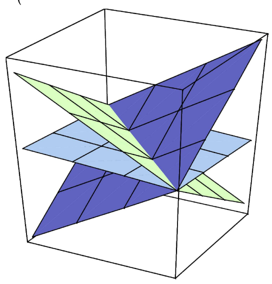
Perustotuus Yleisellä lineaarisella $m \times n$ systeemillä on vain nämä kolme mahdollisuutta. Tämän selvitämme perusteellisesti lähiaikoina.

ESIMERKKI: Kolme yhtälöä ja kolme tuntematonta. Kukin yhtälö määrää tason 3−ulotteisessa avaruudessa.

i) Tasot leikkaavat 1 pisteessä
(yksikäsitteinen ratkaisu)

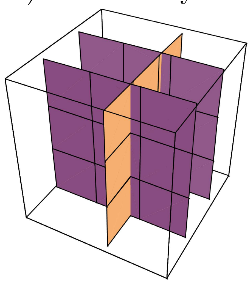


ii) Tasot leikkaavat pitkin suoraa
(ääretön määrä ratkaisuja)



iii) Tasot yhtyvät

iv) Tasoilla ei yhteisiä pisteitä *(ei ratkaisuja)*



Tapaukset i), ii) ja iii) ovat *konsistentteja*, iv) on *epäkonsistentti.*

Tapauksissa ii) ja iii) ratkaisujoukot ovat äärettömiä
edellisen ”dimensio” on 1 ja jälkimmäisen 2.

$$\text{”} \, dim(ii) = 1, \quad dim(iii) = 2 \ \text{”}$$

Lineaarisen yhtälösysteemin Ratkaisujoukko:

Kaikkien mahdollisten ratkaisujen muodostama joukko

Ekvivalentit systeemit:

Lineeriset yhtälösysteemit ovat **ekvivalentit**, jos niillä on samat ratkaisujoukot.

Yhtälösysteemin ratkaisustrategia:

Muokataan yhtälösysteemi ekvivalentiksi systeemiksi, joka on helppo ratkaista

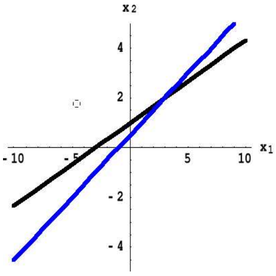
ESIMERKKI:

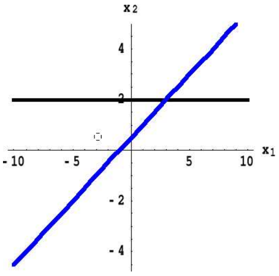
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad Y_2 \leftarrow Y_1 + Y_2$$

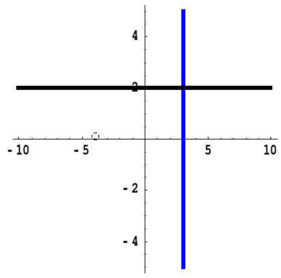
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad Y_1 \leftarrow Y_1 + 2\,Y_2$$

Viimeksi saatu yhtälö on muodossa, josta ratkaisut saadaan peräkkäisillä sijoituksilla alhaalta ylöspäin edeten (takaisinsijoitus, ”back substitution”). Voidaan vaihtoehtoisesti suorittaa vielä yksi eliminaatioaskel alhaalta ylöspäin.

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 3 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array}$$







Matriisinotaatio

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(kerroinmatriisi)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(liitännäismatriisi)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & & & = & 3 \\ & & x_2 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Alkeisrivioperaatiot:

1. *(Rivien vaihto)* Vaihdetaan kaksi riviä keskenään : $\text{rivi}_i \leftrightarrow \text{rivi}_k$

2. *(Skaalaus)* Rivin alkiot kerrotaan nollasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow c\,\text{rivi}_k, \quad c \neq 0$$

3. *(Lineaarikombinaatio)* Riviin lisätään toinen rivi kerrottuna nollasta poikkeavalla vakiolla:

$$\text{rivi}_k \leftarrow \text{rivi}_k + c\,\text{rivi}_i$$

Huom! Operaatioissa 2 ja 3 ainoastaan yksi rivi (k:s) muuttuu, muut säilyvät ennallaan. (Operaatiossa 1 kaikki rivit säilyvät ennallaan, vain paikat vaihtuvat.)

Riviekvivalentit matriisit ja yhtälösysteemit: Matriisit A ja B ovat *riviekvivalentit*, jos ne voidaan muuntaa toisikseen alkeisrivioperaatioilla. Yhtälösysteemit ovat riviekvivalentit, jos niiden liitännäismatriisit ovat sitä.

Riviekvivalentit ovat ekvivalentit:

Lause Riviekvivalentit yhtälösysteemit ovat ekvivalentit, ts. niillä on samat ratkaisujoukot.

Todistus Rivien vaihto ja skaalaus kertoimella $c \neq 0$ säilyttävät ratkaisut.

$$\begin{cases} L_1\boldsymbol{x} = b_1 \\ L_2\boldsymbol{x} = b_2 \\ \dots \\ L_m\boldsymbol{x} = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} L_1\boldsymbol{x} = b_1 \\ c\,L_1\boldsymbol{x} + L_2\boldsymbol{x} = c\,b_1 + b_2 \\ \dots \\ L_m\boldsymbol{x} = b_m \end{cases}$$

Vasen $\Longrightarrow$ oikea: Kertomalla c:llä ja laskemalla yhteen yhtälöt 1 ja 2.
Oikea $\Longrightarrow$ vasen: Kertomalla eka c :llä ja vähentämällä toisesta.

ESIMERKKI:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ & - & 3x_2 & + & 13x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & - & 3x_2 & + & 13x_3 & = & -9 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Takaisinsijoitus

Edetään alhaalta ylös:

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 4x_3 + 4 = 16 \\ x_1 = 2\,x_2 - x_3 = 32 - 3 = 29 \end{cases}$$

Ratkaisu on siis $(29, 16, 3)$ ja se on yksikäsitteinen. (Miksi?)

Takaisinsijoituksen sijasta voitaisiin viimeksi saadusta porrasmuodosta jatkaa eliminointia alhaalta ylös ja oikealta vasemmalle, päämääränä nollata myös jokaisen tukisarakkeen yläosa. Jatko menisi tähän tapaan:

Porrasmuodosta redusoituun porrasmuotoon, ref $\to$ rref

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & & & = & -3 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 29 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Peruskysymykset – olemassaolo ja yksikäsitteisyys

1) Onko systeemi konsistentti, ts. onko ratkaisuja?

2) Konsistentin systeemin ratkaisujen lukumäärä? Milloin yksikäsitteinen ratkaisu?

ESIMERKKI: Onko systeemi konsistentti?

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}$$

Tälle laskettiin edellä porrasmuoto (yläkolmiomuoto) (ref):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tästä näkyy, että systeemi on konsistentti ja ratkaisu on yksikäsitteinen. EIKÖ VAIN!

ESIMERKKI: Miten on tämän systeemin ratkaisujen laita?

$$\begin{array}{r} 3x_2 - \ \ 6x_3 = \ \ 8 \\ x_1 - 2x_2 + \ \ 3x_3 = -1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 9x_3 = \ \ 0 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu: Rivioperaatioilla:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Palataan havainnollisuuden vuoksi yhtälömuotoon:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 & \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & 8 & \\ & & & & 0x_3 & = & -3 & \leftarrow \textit{Ei toteudu sitten millään } x_3\textit{:lla} \end{array}$$

Annettu systeemi on epäkonsistentti (ts. ei ratkaisuja).

ESIMERKKI: Millä h :n arvoilla seuraava systeemi on konsistentti?

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 9x_2 & = & 4 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & = & h \end{array}$$

Ratkaisu: Porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 4 \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ -2 & 6 & h \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & h+\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Toinen yhtälö; $0x_1 + 0x_2 = h + \frac{8}{3}$. Tämä toteutuu vain, jos $h + \frac{8}{3} = 0$ eli $h = \frac{-8}{3}$.

Ensimmäinen yhtälö on $x_1 - 3\,x_2 = \frac{4}{3}$. Ratkaisuja ääretön määrä.

Johtopäätös: Systeemi on konsistentti jos ja vain jos $h = \frac{-8}{3}$.
Tällöin ∞ määrä ratkaisuja.

1.2: Riviporrasmuotojen *ref* ja *rref* yleinen rakenne

Sopimus: Nollarivi/sarake on sellainen (ja vain sellainen), jonka kaikki alkiot $= 0$. *Kysymys on siis nollavektorista. Siten nollasta poikkeva on sellainen, jonka yksikin alkio* $\neq 0$.

(Rivi)porrasmuoto, *"Row Echelon Form"*

1. Jokainen nollasta poikkeava rivi on kunkin nollarivin yläpuolella. (Ts. nollarivit ovat pohjalla.)
2. Jokaisen ei-nollarivin johtava alkio (ts. ensimmäinen nollasta poikkeava alkio) on aidosti oikealla edellisen rivin johtavaa alkiota. (Ts. aina muodostuu ainakin 1:n pituinen porras.)
3. Kunkin johtavan alkion alapuolinen sarakkeen osa koostuu nollista.

ESIMERKKI: Porrasmuotoisia matriiseja

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \end{bmatrix}$$

Redusoitu porrasmuoto (rref): Edellisten ehtojen 1, 2, 3 lisäksi nämä:

4. Jokaisen nollasta poikkeavan rivin johtava alkio on 1.
5. Johtavan alkion määräämän sarakkeen yläpuolinenkin osa koostuu nollista, ts. johtava 1 on tällaisen sarakkeen ainoa nollasta poikkeva alkio.

Redusoitu porrasmuoto (rref) :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \end{bmatrix}$$

Lause 1 [porrasmuotolause, ref-lause]

1. Jokainen matriisi on riviekvivalentti porrasmuotoisen matriisin kanssa.
2. Jokainen matriisi on riviekvivalentti redusoidun porrasmuotoisen matriisin kanssa. Tämä rref-muoto on yksikäsitteinen.

Tärkeät termit: Tukialkio, tukisarake (”pivot”)

- **tukialkio:** porrasmuodossa olevan matriisin nollasta poikkeavan rivin 1. nollasta poikkeva alkio, ts. rivin ”johtava alkio”.
- **tukisarake:** porrasmuodossa olevan matriisin sarake, joka sisältää tukialkion, ts. sama kuin ”johtava sarake”.
  Alkuperäisen matriisin **tukisarakkeiksi** kutsutaan niitä sarakkeita, jotka ovat porrasmuotoon saatetun matriisin tukisarakkeiden kohdilla.

Huom! Lauseessa 1 (reflause) todetaan, että rref-muoto on yksikäsitteinen. Sensijaan ref-muoto ei ole, pelkästään rivin skaalauksella saadaan uusia ref-muotoja. Tukisarakkeiden paikat sensijaan ovat samat kaikissa ref-muodoissa, koska siirtyminen ref-muodosta (yksikäsitteiseen) rref-muotoon ei paikkoja muuta.

ESIMERKKI: Muunna matriisi porrasmuotoon ja paikanna tukisarakkeet.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

- 1. rivi ja 4. rivi vaihdetaan $\Rightarrow$ Tukialkio on 1 ja 1. sarake on tukisarake.

- Nollataan tukialkion 1 avulla 1. sarakkeen alaosa.

- 2. sarake on tukisarake, otetaan tukialkioksi 2 (ei rivinvaihtoja)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alkuperäinen matriisi: } \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{tukisarakkeet:} & 1 & 2 & & 4 & \end{array}$$

Huom!

- Kullakin rivillä on korkeintaan yksi tukialkio.
- Kullakin sarakkeella on korkeintaan yksi tukialkio.
- Tukisarakkeiden lukumäärä = porrasmuodon nollasta poikkeavien rivien lkm.

ESIMERKKI: (a) Saata matriisi rivioperaatioilla porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

Ratkaisu:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ tässäpä porrasmuoto (ref)

(b) Redusoitu porrasmuoto (rref):

Aloitetaan oikeanpuolimmaisesta tukisarakkeesta, joka tässä on viimeistä edellinen (kerroinmatriisin viimeinen). Jos kyseessä on yhtälösysteemin liitännäismatriisi (kuten yleensä on), niin viimeistä saraketta ei tarvitse ryhtyä nollaamaan. Jos se nimittäin on tukisarake, ei ratkaisuja ole, ja koko homma voidaan lopettaa.
Nollataan alhaalta ylös ja siirrytään oikealta vasemmalle seuraavaan tukisarakkeeseen.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Harjoittele: Kirjoita yhtälösysteemin $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ yleinen ratkaisu (a) käyttäen yllä olevaa ref-muotoa, (b) rref-muotoa, kun liitännäismatriisi $[A \mid \boldsymbol{b}]$ on edellisen tehtävän matriisi.

Lineaaristen yhtälösysteemien ratkaisut

- **kantamuuttuja:** muuttuja, joka vastaa tukisaraketta.
- **vapaa muuttuja:** ei-kantamuuttuja.

ESIMERKKI:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{lllll} x_1 & +6x_2 & & +3x_4 & & = 0 \\ & & x_3 & -8x_4 & & = 5 \\ & & & & x_5 & = 7 \end{array}$$

tukisarakkeet:
kantamuuttujat:
vapaat muuttujat:

Konsistentin lineaarisen systeemin yleinen ratkaisu:

Kun systeemi on saatettu porrasmuotoon, saadaan ratkaisu(t) ns. **takaisinsijoituksella**. Ratkaisut voidaan kirjoittaa alhaalta ylös. Jokainen vapaa muuttuja jää vapaasti valittavaksi parametriksi.
Jos systeemi on saatettu rref-muotoon, on ratkaisu vielä helpompaa ja voidaan suorittaa ylhäältä alas.

ESIMERKKI: Olkoon systeemin liitännäismatriisi saatettu rivioperaatioilla porrasmuotoon.

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Ratkaise vastaava yhtälösysteemi.

Ratkaisu: Tukisarakkeet ovat $1., 3., 5.$ Siis konsistentti. (miksi?)

$$\left\{ \begin{array}{ccccc|} x_1 & +6x_2 & & +3x_4 & & = 0 \\ & & x_3 & -8x_4 & & = 5 \\ & & & & x_5 & = 7 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ vapaa} \\ x_3 = 5 + 8x_4 \\ x_4 \text{ vapaa} \\ \text{x}_5 = 7 \end{array} \right.$$

Tässä on systeemin yleinen ratkaisu, vapaat muuttujat ovat vapaasti valittavia parametrejä (voitaisiin selvyyden vuoksi merkitä vaikkapa $x_2 = s, \quad x_4 = t$)

(**Tukisarakkeet:** Todettiin jo: 1, 3, 5)

Olemassolo- ja yksikäsitteisyys/lukumääräpäätelmät yleisesti

ESIMERKKI:

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x_2 & -6x_3 & +6x_4 & +4x_5 & = -5 \\ 3x_1 & -7x_2 & +8x_3 & -5x_4 & +8x_5 & = 9 \\ 3x_1 & -9x_2 & +12x_3 & -9x_4 & +6x_5 & = 15 \end{array}$$

Aiemmassa esimerkissä saatiin porrasmuoto:

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad (x_5 = 4)$$

Muotoa $0 = c$, ($c \neq 0$) olevaa yhtälöä ei ole, joten systeemi on konsistentti·

Vapaat muuttujat: x_3 and x_4

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Konsistentti systeemi}\\ \textbf{Vapaita muuttujia on}\end{array}} \Longrightarrow \textbf{Äärettömän monta ratkaisua}$$

ESIMERKKI:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +4x_2 & = & -3 \\ 2x_1 & +5x_2 & = & 5 \\ -2x_1 & -3x_2 & = & 1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{rcl} 3x_1 & + & 4x_2 = -3 \\ & & x_2 = 3 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Konsistentti systeemi,}\\ \textbf{Ei vapaita muuttujia}\end{array}} \Longrightarrow \textbf{Yksikäsitteinen ratkaisu.}$$

Lause 2 (Olemassolo- ja yksikäsitteisyyslause)

1. Lineaarinen systeemi on konsistentti, jos ja vain jos liitännäismatriisin viimeinen sarake (tunnettujen lukujen vektori $\boldsymbol{b}$) ei ole tukisarake, ts. liitännäismatriisin porrasmuodossa ei ole yhtään riviä, joka olisi tyyppiä

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & b \end{bmatrix} \text{ (missä } b \neq 0)$$

2. Jos lineaarinen systeemi on konsistentti, niin ratkaisuja on (a) Joko yksi tai (b) ääretön määrä.
   (a) $\Longleftrightarrow$ Jokainen sarake on tukisarake
   (b) Vapaa muuttuja jokaista ei-tukisaraketta kohti

Resepti lineaarisen yhtälösysteemin ratkaisemiseksi

1. Muodostetaan liitännäismatriisi ja muokataan se Gaussin rivioperaatiilla porrasmuotoon.
2. Katsotaan (pohjalla olevia) kerroinmatriisin nollarivejä, jos niitä on. Mikäli tässä paljastuu muotoa $[0, \dots, 0, c]$, $c \neq 0$ oleva rivi, ei systeemillä ole ratkaisuja. (Lopeta tähän.)
3. Ellei kohdan 2. tilannetta esiinny, saadaan ratkaisu takaisinsijoituksella alhaaalta ylös. Tässä jokainen mahdollinen ei-kantamuuttuja (sellainen, joka vastaa ei-tukisaraketta) on vapaa parametri. (Jos kaikki ovat kantamuuttujia, on ratkaisu yksikäsitteinen.)

3'. Vaihtoehtoisesti voidaan jatkaa rivioperaatioita alhaalta ylös rref-muotoon saakka, jolloin takaisinsijoitusvaihe sisältää pelkästään toisistaan riippumattomien 1. asteen yhtälöiden ratk.

Kysymyksiä:

Huomaa! Kun puhutaan $m \times n-$systeemistä, viitataan *kerroinmatriisin* kokoon (liitännäismatriisissa on yksi sarake enemmän).

a) Miten monta tukialkiota (tukisaraketta) voi 4×6-systeemillä korkeintaan olla?

b) Miten monta tukialkiota (tukisaraketta) voi 6×4-systeemillä korkeintaan olla?

c) Kuinka paljon ratkaisuja on konsistentilla systeemillä, jossa on 3 yhtälöä ja 4 tuntematonta?

d) Oletetaan, että $4 \times 6-$systeemin kerroinmatriisilla on 3 tukisaraketta. Kuinka monta tukisaraketta on liitännäismatriisilla, jos systeemi on epäkonsistentti?

1.3 Vektoriyhtälöt

Avainkäsitteet: Vektorien **lineaarikombinaatio** , **virittävä joukko, viritelmä**

Vektori: $\boldsymbol{v} = [v_1, \ldots, v_n]^T \in \mathbb{R}^n$

(Usein ajatellaan vektori pystyvektorina, siksi tuo ^{T}.)

Lineaarikombinaatiot:

Olkoon annettu vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ ja skalaarit $c_1, c_2, \ldots, c_p$. Vektori $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

on vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ lineaarikombinaatio, (paino)kertoimin $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

ESIM: Olkoot $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Esitä piirroksen avulla kukin alla oleva vektori $\mathbf{v}_1$:n ja $\mathbf{v}_2$: n lineaarikombinaationa

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ESIM:

Olkoot $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Selvitä, onko $\mathbf{b}$ vektorien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ja $\mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatio.

Ratkaisu: Vektori $\mathbf{b}$ on vektorien $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ja $\mathbf{a}_3$ lineaarikombinaatio, jos löydetään luvut x_1, x_2, x_3 siten että

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}.$$

Vektoriyhtälö (*):

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 14x_2 & + & 10x_3 & = & -5 \end{array}$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \begin{array}{r} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{array}$$

Siis:

Ratkaisu vektoriyhtälölle

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$$

saatiin ratkaisemalla lineaarinen systeemi, jonka liitännäismatriisi:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 14 & 10 & -5 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b} \end{array} \end{array}$$

Riviajattelu vs. sarakeajattelu

Yllä oleva lasku (yhtälön vasen puoli) voidaan ilmaista myös näin:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = A\,\mathbf{x},$$

missä

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

Vektorimuoto vs. matriisimuoto yleisesti

Vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

on samat ratkaisut kuin lineaarisella systeemillä, jonka liitännäismatriisi on

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Erityisesti $\mathbf{b}$ voidaan lausua lineaarikombinaationa vektoreista $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$

jos ja vain jos

lineaarisella systeemillä, jonka liitännäismatriisi on yllä, on ratkaisuja $(x_1, \ldots x_n)$

Määritelmä: Vektorijoukon viritelmä (”span”)

Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ $\mathbb{R}^n$:n vektoreita.

$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ = vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ kaikkien lineaarikombinaatioiden joukko.

Toisin sanoen: $\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ on kaikkien vektorien joukko, jotka voidaan lausua muodossa

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p$$

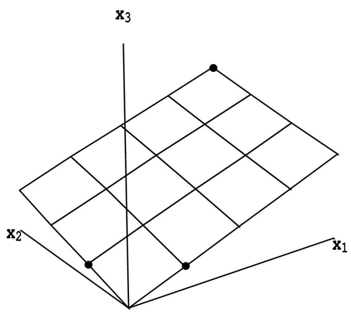
missä $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ovat skalaareja.

ESIMERKKI: Olkoon $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Määritä jokin vektori joukossa $\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

(b) Luonnehdi $\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ geometrisesti.

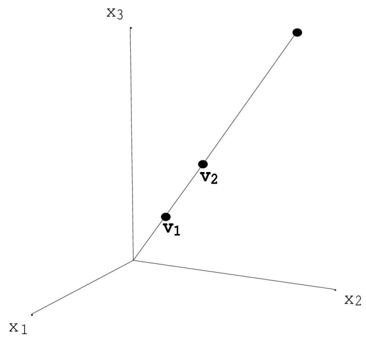
ESIMERKKI: Merkitse $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ja $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$ oheiseen kuvaan.



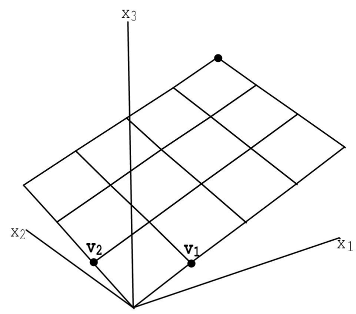
$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ja $3\mathbf{u}+4\mathbf{v}$

$\mathbf{sp}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ on muotoa $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v}$ olevien vektorien joukko, tässä O:n kautta kulkeva taso.

Virittäviä joukkoja $\mathbb{R}^3$:ssa



$\mathbf{v}_2$ on $\mathbf{v}_1$:n monikerta
$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ =$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1\}$ =$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_2\}$
(origon kautta kulkeva suora)



$\mathbf{v}_2$ ei ole $\mathbf{v}_1$:n kerrannainen
$\mathbf{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ = origon kautta kulkeva taso

ESIMERKKI: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$. Matriisin A sarakevektorit virittävät tason. Onko $\mathbf{b}$ tässä tasossa?

Ratkaisu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Onko olemassa x_1 ja x_2 siten, että __

Corresponding augmented matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -21 \\ 0 & 5 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & -5 & -21 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Siis $\mathbf{b}$ ei ole A:n sarakevektorien virittämässä tasossa.

1.4 Matriisiyhtälö $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

(Matriisi $\times$ vektori) - tulon sarakemuoto

Olkoon A $m \times n$ matriisi, jonka sarakevektoreita merkitään: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ja olkoon $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$. Tulo $A\mathbf{x}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x_1\ \mathbf{a}_1 + x_2\ \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Esimerkki:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 - 4\,x_2 \\ 3\,x_1 + 2\,x_2 \\ 5\,x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Yleisesti

$$A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1\,\mathbf{a}_1 + x_2\,\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\,\mathbf{a}_n,$$ missä $\mathbf{a}_j$:t ovat A :n sarakevektorit.

Kolme tapaa katsoa lineaarista systeemiä:

2. Vektoriyhtälönä $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$
3. Matriisiyhtälönä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Olkoon A $m \times n$ matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, ja olkoon $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Tällöin lineaarisella yhtälösysteemillä

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

on samat ratkaisut kuin vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Toisin sanoen vektoriyhtälö ratkaistaan liitännnäismatriisin

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

avulla. **Hyödyllinen tosiasia:**

Yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisu(ja), jos ja vain jos $\mathbf{b}$ on $A : n$ sarakevektorien **lineaarikombinaatio**

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Onko yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistentti kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

Ratkaisu: Liitännäismatriisi yhtälölle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ -3 & -11 & -14 & b_2 \\ 2 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$

Voiko siis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mitenkään olla konsistentti kaikilla $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & -11 & -14 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{matrix}$$

Yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on konsistentti, jos ja vain jos $-2b_1 + b_3 = 0$. (tason yhtälö $\mathbb{R}^3 : ssa$)

$\mathbf{b}$ voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_3 + x_3\mathbf{a}_3$$

jos ja vain jos $b_3 - 2b_1 = 0$.

A :n sarakkeet virittävät tason $\mathbb{R}^3$:ssa

Pohdittavaksi:

Millähän ehdolla matriisin A $(m \times n)$ sarakkeet virittävät koko avaruuden $\mathbb{R}^m$, eli millon on $\mathrm{sp}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\} = \mathbf{R}^m$

Vastaus: ref(A):ssa ei nollarivejä. Tämä merkitsee erityisesti, että on oltava $n \geq m$.

LAUSE 4

Olkoon A $m \times n$ matriisi. Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitävät:

a. Jokaisella $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ yhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on ratkaisu.

b. Jokainen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ on A :n sarakkeiden lineaarikombinaatio. (Ts. A :n sarakkeet virittävät $\mathbb{R}^m$:n.)

c. A :n jokainen rivi on tukirivi, ts. *ref*(A):ssa ei ole yhtään nollariviä.

Tod:

(a) $\iff$ (b) todettiin juuri.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Jos A:ssa ei ole nollarivejä, voidaan kaikki yhtälöt ratkaista ref-muodosta takaisinsijoituksella (ristiriitaisia yhtälöitä ei synny). Vapaita parametrejä voi tulla, mutta nehän vaan lisäävät ratkaisujoukkoa.

(a) $\Longrightarrow$ (c): Jos ratkaisu on jokaisella $\boldsymbol{b}$, niin se on sellaisellakin, joka rivioperaatioissa muuntuu vaikkapa vektoriksi $[0, \ldots, 1]^T$ (Koska käänteisoperaatioilla päästään takaisin tuohon "sellaiseen"$\boldsymbol{b}$.)
Mutta tällöinhän alin rivi ei voi olla nollarivi.

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Onko yhtälö $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsistentti kaikilla mahdollisilla $\mathbf{b}$?

Ratk: A:ssa on vain 2 saraketta ja siksi korkeintaan 2 tukiriviä, joten vastaus: **ei**.

Esim: Virittävätkö A :n sarakeet $\mathbb{R}^3$:n, kun $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \sim$$

Paljastuu 1. rivioperaatiossa!
No siinä syntyy nollarivi, joten kaikki eivät ole tukirivejä ja siten **eivät viritä.**

— 1.4 loppuu tähän —

1.5 Homogeeninen lineaarinen systeemi $A\boldsymbol{x} = \{0\}$

(A ($m \times n$) ja $\mathbf{0}$ on $\mathbb{R}^m$:n nollavektori.)

Esim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviaali ratkaisu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogeenisella systeemillä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on *aina* triviaaliratkaisu $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Siis se on aina konsistentti.

Onko **epätriviaaleja** ratkaisuja?

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konsistentti systeemi, jolla on vapaa muuttuja (x_2), siis (äärettömän paljon) ratkaisuja.

Tässä tapauksessa ratkaisujoukko on $\{0\}$:n kautta kulkeva suora: $x_1 + 10\,x_2 = 0$.

Yleisesti pätee: Homogeeniyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on epätriviaaleja ratkaisuja

jos ja vain jos systeemillä on **vapaita muuttujia**

Seurauksena tärkeä:
Lause [LinHom] Olkoon A $(m \times n)$. Jos $n > m$ (enemmän sarakkeita kuin rivejä), niin homogeeniyhtälöllä $A\boldsymbol{x} = \{0\}$ on epätriviaaleja ratkaisuja.

Tod: Homogeeninen on aina konsistentti, tukisarakkeiden lkm $\leq m < n$, joten ainakin yksi vapaa muuttuja, $\Rightarrow$ äärettömän monta ratkaisua.

Esimerkki: Selvitä, onko seuraavalla homogeenisella systeemillä epätriviaaleja ratkaisuja ja kuvaa ratkaisujoukko.

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 8x_2 & - & 10x_3 & = & 0 \end{array}$$

Ratkaisu:

Ilman ainuttakaan rivioperaatiota tiedämme, että systeemillä on ainakin yksi vapaa muuttuja. (miksi?)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = 0, \quad x_2 = t(\text{vapaa}), \quad x_3 = 0.$$

Siis

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kyseessä on $\{0\}$:n kautta kulkeva, vektorin $\boldsymbol{v} = [-2, 1, 0]^T$ suuntainen suora $\mathbb{R}^3$:ssa.

Esim 2 A (3×1), tässä siis vain yksi yhtälö (eikä rivioperaatioita tarvita).

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Vapaat muuttujat $x_2 = s, \quad x_3 = t$. Ratkaisu:

$$\begin{cases} x_1 = 0.3s + 0.2t \\ x_2 = s + 0t \\ x_3 = 0s + tt \end{cases}$$

Vektorimuodossa:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3\,s + 0.2\,t \\ s + 0t \\ 0s + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3\,s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2\,t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ratkaisujoukko on $\mathbb{R}^3$:n taso T, jonka virittävät vektorit:

$$\boldsymbol{v}_1 = [0.3, 1, 0]^T, \quad \boldsymbol{v}_2 = [0.2, 0, 1]^T$$

Ts.

$$T = sp\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$$

1.7 Lineaarinen riippumattomuus (LRT)/riippuvuus (LRV)

Palauta mieleen virittäminen. Taso voidaan virittää 2:lla erisuuntaisella vektorilla. Toki viritys onnistuu aina vain runsaammin, jos otetaan lisää vektoreita. Yleensä pyritään karsimaan riippuvuudet, tähdätään **minimaaliseen virittäjäjoukkoon**.

Vektoriyhtälöllä

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

on triviaaliratkaisu $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Mutta **onko muita?**

Yhtäpitävä (HY):n kanssa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Määritelmä

Vektorijoukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbf{R}^n$ on **lineaarisesti riippumaton** (LRT), jos vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

on vain triviaaliratkaisu. Joukko $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ on **lineaarisesti riippuva** (LRV), jos on olemassa kertoimet $c_1, \ldots, c_p$, jotka kaikki eivät ole nollia siten, että

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

$$\uparrow$$

lineaarinen riippuvuusrelaatio

(ainakin jokin $c_j \neq 0$)

EXAMPLE Olkoot $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}.$

a. Osoita, että $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineaarisesti riippumaton.

b. Määritä lineaarinen riippuvuusrelaatio vektorien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ välillä.

Ratkaisu: (a)

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 on vapaa muuttuja $\Rightarrow$ ei-triviaaleja ratkaisuja on, joten vektorit ovat LRV.

(b) rref-muoto: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 33 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{lcl} x_1 & = & -33\,x_3 \\ x_2 & = & 18\,x_3 \\ x_3 & & \text{vapaa} \end{array}$

Olkoon $x_3 = 1$ (mielivaltainen luku $\neq 0$). Tällöin $x_1 = -33$, $x_2 = 18$.

$$-33 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + 18 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eli

$$-33\,\mathbf{v}_1 + 18\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

(Eräs lineaarinen riippuvuusrelaatio, muut saadaan mieliv. vakiolla kertomalla.)

Erikoistapauksia *1. Yhden vektorin joukko*

Tarkastellaan yhden vektorin joukkoa: $\{\mathbf{v}_1\}$, $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$.

Ainoa ratkaisu yhtälölle $x_1\mathbf{v}_1 = 0$ on $x_1 = 0$.

$$\boxed{\text{Siten } \{\mathbf{v}_1\} \text{ on LRT, kun } \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}.}$$

2. Kahden vektorin joukko

Esim. Olkoot

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Selvitä, onko $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ LRT/LRV.

b. Sama tälle: $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Ratkaisu: (a) Huomaa, että $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1$. Siksi

$$(-2)\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = 0$$

Tämä merkitsee, että $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ on LRV .

(b) Olkoon

$$c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Jos $c \neq 0$, niin $\mathbf{v}_1 = \frac{-d}{c}\mathbf{v}_2$. $\mathbf{v}_1$ olisi $\mathbf{v}_2$:n skalaarikerrannainen, mikä ei pidä paikkaansa. Siten on oltava $c = 0$, mutta silloinhan myös $d = 0$

Niinpä $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ on LRT joukko.

2. Kahden vektorin joukko on

- LRV, jos ainakin toinen on toisen skalaarikerrannainen.
- LRT, jos kumpikaan ei ole toisen skalaarikerrannainen.

3. Joukko, joka sisältää 0*-vektorin on LRV*

Jos $\{0\}$ kuuluu vektorijoukkoon $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbf{R}^n$, niin S on LRV.

Tod: Järjestetään vektorit niin, että $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Nollavektorin kertoimeksi voidaan valita mikä tahansa, vaikka $c_1 = 29$. Muut voidaankin valita nolliksi:

$$29\,\mathbf{v}_1 + 0\,\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

mikä osoittaa, että S on LRV , koska $29 \neq 0$.

4. LRV joukon ylijoukko on LRV, LRT joukon osajoukko on LRT

Tod: Olkoon vaikka $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ LRV. Silloin vektoriyhtälöllä

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

on epätriviaali ratkaisu, eli jokin $c_j \neq 0, \quad c_j = 1, 2$ tai 3. No jos lisätään joukkoon jokin vektori $\mathbf{v_4}$, niin

$$c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + c_3\,\mathbf{v}_3 + 0\,\mathbf{v_4} = \mathbf{0},$$

ja edelleenkin $c_j \neq 0$, joten

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \text{ on LRV.}$$

LRT-väite palautuu välittömästi tähän loogisella ”kontarpositiolla”.

Theorem 7 Lay s. 68, tod. s. 70

Indeksoitu joukko $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$, jossa on ainakin kaksi vektoria on LRV, jos ja vain jos ainakin yksi on muiden lineaarikombinaatio.
Väitettä voidaan "terästää" näin:
Jos S on LRV ja $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, niin jokin vektori $\mathbf{v}_j$ $(j \geq 2)$ on sitä edeltävien vektorien $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$ lineaarikombinaatio.

Tod:
1. Jos jokin, sanokaamme nyt $\mathbf{v_p}$ on muiden lineaarikombinaatio:

$$\mathbf{v}_p = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{p-1}\,\mathbf{v}_{p-1},$$

niin

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{p-1}\,\mathbf{v}_{p-1} + (-1)\mathbf{v}_p = 0 \text{ ja} -1 \neq 0.$$

Siis LRV .

2. Oletetaan LRV. Siis on olemassa kertoimet $c_1, \ldots, c_p$:

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\,\mathbf{v}_p = \mathbf{0},$$

ja jokin $c_j \neq 0$. Voitaisiin siirtää muut kuin j. termi toiselle puolelle ja jakaa c_j :llä.

Tehdään samantien tuo väitteessä esitetty "terästetty"muoto:

Olkoon j suurin indeksi, jolla $c_j \neq 0$. Oltava $j > 1$, koska $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Siis

$$c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_j\,\mathbf{v}_j = \mathbf{0}, \quad c_j \neq 0.$$

Siirretään muut toiselle puolelle ja jaetaan c_j:llä:

□

4. Joukko, jossa on liikaa vektoreita, $\mathbb{R}^n$*:n* $(n+1)$ *vektoria*

Theorem 8 (Lay s. 69)

Vektorijoukkko on LRV, jos siinä on enemmän vektoreita kuin vektorien pituus, ts. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ $p > n$.

Todistus: Olkoon $A = [\mathbf{v_1} \ \ldots \ \mathbf{v_p}]$ Vektoriyhtälö kirjoitetaan homogeeniseksi matriisiyhtälöksi $A\,\boldsymbol{x} = \{0\}$. No, tähän meillä on valmis lause, mutta voidaan ottaa suoraan perusasioista: Tukisarakkeiden lkm $\neq m < n$, joten vapaita muuttujia on ainakin yksi ja siten ratkaisuja ääretön määrä (siis varmasti muitakin kuin triviaali. tukisarakkeiden lukumäärä.

□

Esim. (omatoimisesti) Päättele minimaalisella työmäärällä seuraavien vektorijoukkojen LRT/LRV :

a. $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ b. Matriisin $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ sarakkeet.

c. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ d. $\left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Esim Katsele $\mathbb{R}^3$:n vektorijoukkoa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ kuvassa.
Onko LRV/LRT ?

1.8 Lineaarikuvaukset, johdatus

Toinen tapa katsoa yhtälöä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Matriisi A on objekti, joka operoi argumenttivektoriin $\mathbf{x}$ matriisikertolaskun välityksellä. Tuloksena on uusi vektori $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

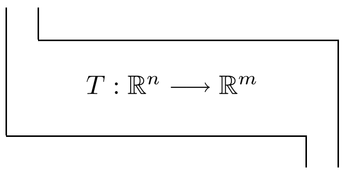
Esim:

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Olkoon A $(m \times n)$. Yhtälön $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ratkaiseminen tarkoittaa kaikkien vektorien $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ etsimistä, jotka kuvautuvat vektorille $\mathbf{b}$ matriisilla A kerrottaessa.

transformaatio
"kone"

Matriisikuvaukset **Kuvaus (funktio)** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on sääntö, joka liittää jokaiseen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorin $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$.



Kuvaustermejä $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$**:**

$\mathbb{R}^n$ – **määrittelyjoukko** $\mathbb{R}^m$ – **maalijoukko**

$T(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ on $\mathbf{x}$:n **kuva** kuvauksessa T.

Kaikkien kuvien $T(\mathbf{x})$ joukko on T :n **kuvajoukko**, **"range"**

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$; $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Jos vaikkapa $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, niin $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Esim: Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Määritellään kuvaus $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a. Määritä $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$.

b. Onko useampia kuin yksi $\mathbf{x}$, jonka kuva kuvauksessa T on $\mathbf{b}$. *(yksikäsitteisyysongelma)*

c. Selvitä, onko $\mathbf{c}$ kuvauksen T kuvajoukossa. *(olemassaolo-ongelma)*

Ratkaisu: (a) Ratkaise $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\mathbf{x}$:n suhteen, ts.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 10 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Liitännäismatriisi:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ -5 & 10 & -15 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 3x_3 + 2 \\ x_2 \text{ on vapaa} \\ x_3 \text{ on vapaa} \end{array}$$

Valitaan jotkin arvot vapaille muuttujille, vaikkapa: Olkoot $x_2 = -1$ ja $x_3 = 0$. Silloin $x_1 = 0$.

Ja siis $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ (Valinnanvaraa on todella paljon, kokonainen "tasollinen".)

(b) Onko olemassa $\mathbf{x}$ jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$?

Vapaita muuttujia on $\Longrightarrow$ On olemassa useita $\mathbf{x}$ joille $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$

(c) Onko olemassa $\mathbf{x}$, jolle $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$? Ts. onko $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$

Kun $\mathbf{c}-$vektorille tehdään asianmukainen rivioperaatio (kerrotaan 1. alkio 5 :llä ja lisätään toiseen (0:aan), saadaan $15 (\neq 0)$, joten ratkaisua ei ole.

Huomaa, että (b)- ja (c)-kohdat voitaisiin ratkaista yhtäaikaa laittamalla molemmat sarakkeiksi liitännäismatriisin loppuun.

Matriisikuvauksilla on monia sovelluksia - esimerkiksi *tietokonegrafiikassa.*

Esim 1: $A = \begin{bmatrix} .5 & 0 \\ 0 & .5 \end{bmatrix}$. Kuvaus $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on esimerkki **kontraktio**kuvauksesta.

Jos $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$, niin

$$A\mathbf{x} = 0.5\,\mathbf{x}.$$

Miten kuvautuu O-keskinen ympyrä?
Miten kuvautuu yksikköneliö , jonka kärki on origossa?
Jne.

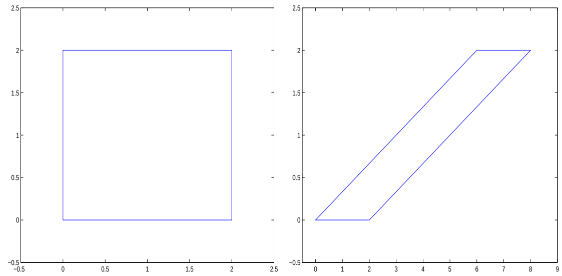
Esim 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Jos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, niin $A\,\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{R}^3$:n pisteen $\mathbf{x}$ projektio $x_1 x_2-$ tasoon,

$$[x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_1, x_2]$$

Esim 3: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3\,x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

x_2-koordinaatti pysyy samana, x_1-koordinaatti liukuu.



Matlab/Octave-sessio

```
>> nx=[0 2 2 0 0];ny=[0 0 2 2 0];
>> plot(nx,ny)
>> axis([-.5 2.5 -.5 2.5])
>> nelio=[nx;ny]

nelio =

     0     2     2     0     0
     0     0     2     2     0

>> kuva=A*nelio

kuva =

     0     2     8     6     0
     0     0     2     2     0

>> figure;plot(kuva(1,:),kuva(2,:))
>> axis([-.5 9 -.5 2.5])
```

Tämäntyyppinen kuvaus on nimeltään ”shear”, ”leikkaus” tai ehkä ”liu’utus”.
Sovellusalueita: Fysiikka yleisesti, geologia, kristallografia.

Lineaarikuvaukset Jos A on $m \times n$, niin matriisikuvauksella $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ on seuraavat ominaisuudet:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\,\mathbf{u} + A\,\mathbf{v}.$$

$$= \mathbf{T}\,\mathbf{u} + \mathbf{T}\,\mathbf{v}$$

$$T\,(c\mathbf{u}) = A\,(c\mathbf{u}) = c\,A\mathbf{u} = c\,T\,(\mathbf{u})$$

kaikilla $\mathbf{u}$,$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ja kaikilla skalaareilla c.

Määritelmä

Kuvaus T on **lineaarinen** jos:

i. $T\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T\,(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ T :n määrittelyjoukossa.
ii. $T\,(c\mathbf{u}) = cT\,(\mathbf{u})$ kaikilla $\mathbf{u}$ T:n määrittelyjoukossa ja kaikilla skalaareilla c.

$$\boxed{\text{Jokainen matriisikuvaus on } \textbf{lineaarinen}\text{ .}}$$

Ominaisuuksia Jos T on lineaarikuvaus, niin

$$T\,(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \qquad \text{ja} \qquad T\,(c\mathbf{u}+d\mathbf{v}) = c\mathbf{T}\,(\mathbf{u}) + d\mathbf{T}\,(\mathbf{v}).$$

Perustelu:

$$T\,(\mathbf{0}) = T\,(0\mathbf{u}) = 0\,T\,(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$
$$T\,(c\mathbf{u}+d\mathbf{v}) = T\,(c\,\mathbf{u}) + T\,(d\,\mathbf{v}) = c\,T\,(\mathbf{u}) + d\,T\,(\mathrm{v}\ )$$

Lineaarikuvausteema ei pääty tähän, mutta kalvosarja ja vastaavat prujut päättyvät (toistaiseksi).