L 9, to 23.11.06

1 Johdantoesimerkki

Seostehtävä:
Säiliö A: alkuhetkellä $100l$ vettä.
Säiliö B: alkuhetkellä $100l$ vettä, johon sekoitettu 1.5 kg suolaa .
Täydellinen sekoitus. Määritä suolamäärät $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ säiliöissä A ja B hetkellä t.

```
|            |         |          |
|            |_________|          |
|             <--2 l/min          |
|            -----------          |
|    A       |         |    B     |
|            |---------|          |
|            2 l/min -->          |
|            |---------|          |
|____________|         |__________|
```

Ratkaisu:
Suolapitoisuudet säiliöissä hetkellä t: $\frac{y_1(t)}{100}$ kg/l ja $\frac{y_2(t)}{100}$ kg/l.
Suolamäärän muutosnopeus säiliössä = (sisäänvirtaus) $-$ (ulosvirtaus).

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2\frac{y_2(t)}{100} - 2\frac{y_1(t)}{100} = -0.02\,y_1(t) + 0.02\,y_2(t) \\ y_2'(t) = 2\frac{y_1(t)}{100} - 2\frac{y_2(t)}{100} = 0.02 y_1(t) - 0.02\,y_2(t) \end{cases}$$

Matriisimuodossa: $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}(t)$, missä $A = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.02 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y1\ (t) \\ y2\ (t) \end{bmatrix}$

Yrite: $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{x}$, missä $\mathbf{x}$ on vakiovektori. (Muista 2. kertaluvun vakiokert. diffyhtälöitä: Sijoitettiin yrite: $y = C\,e^{\lambda t}$ ja pyrittiin määräämään parametri λ.) Nyt on määrättäviä parametreja λ:n lisäksi vektorin $\mathbf{x}$ koordinaatit x_1, x_2.

Sijoitetaan yhtälöön: $\mathbf{y}(t)$ ja $\mathbf{y}'(t) = \lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{x} \implies$

$$\lambda\,e^{\lambda t}\mathbf{x} = e^{\lambda\,t}A\,x \quad \forall t.$$

Tämä toteutuu $\iff A\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$.

Siispä johduimme ominaisarvotehtävään.

Muotoa

$$\mathbf{y}(t) = C_1\,e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + C_2\,e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2$$

olevat vektorifunktiot ovat ratkaisuja, kun λ_j on ominaisarvo ja $\mathbf{x}_j$ vastaava ominaisvektori, $j = 1, 2$.

Lasketaan (luennolla tarkemmin) : $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -0.04$.

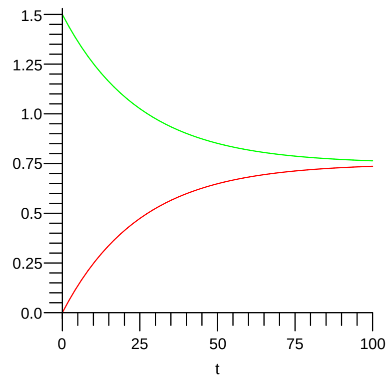
Ominaisvektorit: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Alkuehdot: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = C_1\,\mathbf{x}_1 + C_2\,\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$

Saadaan heti: $C_1 = 0.75, \quad C_2 = -0.75$.

Ratkaisu: $\mathbf{y}(t) = 0.75 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0.75e^{-0.04t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
Koordinaattifunktiomuodossa:

$$\begin{cases} y_1(t) = 0.75(1 - e^{-0.04t}) \\ y_2(t) = 0.75(1 + e^{-0.04t}) \end{cases}$$



Onko tämä ratkaisutekniikka yleispätevä? Sitäpä nyt selvittelemään!

2 Vektori/matriisifunktioita, LRT/LRV

Matriisi- ja vektorifunktioita

Reaalimuuttujan t vektoriarvoinen funktio $t \mapsto \mathbf{v}(t)$.
Reaalimuuttujan t matriisiarvoinen funktio $t \mapsto A(t)$.
(Edellinen on erikoistapaus jälkimmäisestä.)

Derivaatta ja integraali ym. tarkoittavat *alkioittaisia* operaatioita.

Esimerkki 2.1 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 1 & -\sin(t) \end{bmatrix}, \quad A'(t) = \begin{bmatrix} -\sin(t) & 0 \\ 0 & -\cos(t) \end{bmatrix}$$

Lause 2.1 *Summan ja tulon derivoimiskaavat pätevät:*

$$\frac{d}{dt}(A(t) + B(t)) = A'(t) + B'(t), \quad \frac{d}{dt}(A(t)\,B(t)) = A'(t)\,B(t) + A(t)\,B'(t).$$

Tod: *Seuraavat suoraan vastaavista skalaarifunktioiden kaavoista. Katsotaan kuitenkin jälkimmäinen: Olkoon $C(t) = A(t)\,B(t)$*

$$c_{ij}(t) = (A(t)\,B(t))_{ij} = \sum_k a_{ik}(t)\,b_{kj}(t).$$

Sovelletaan summan dervoimiskaavaa ja kussakin yhteenlaskettavassa tulon kaavaa. Siispä $c'_{ij}(t) =$ ___

$\square$

Huom! Vaikka matriisit olisivat neliömatriiseja (siis kertomiskelpoisia myös toisinpäin), **ei saa vaihtaa** tulontekijöiden järjestystä!

Funktioiden LRT/LRV

Jos on opiskeltu abstraktia lineaarialgebraa, ei näitä tarvitse erikseen määritellä. Meillä ei näin tehty, joten

Määritelmä 2.1 *Vektorifunktiot* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *ovat LRT välillä* $I = (a, b)$*, jos* $c_1\, \mathbf{v}_1(t) + \ldots + c_n\, \mathbf{v}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I \quad \Longrightarrow \; c_1 = \ldots = c_n = 0.$

(Tämä on sopusoinnussa yleisen LRT- määritelmän kanssa, koska kaksi funktiota ovat samoja määrittelyvälillään I, jos ne yhtyvät kaikissa pisteissä $t \in I$.)

Lemma 2.2 (LRT-lemma 1) *Olkoot vektorifunktiot muotoa* $\mathbf{x}_j(t) = f_j(t)\, \mathbf{v}_j$ *, missä* f_j*:t skalaarifunktioita ja* $\mathbf{v}_j$ *:t vakiovektoreita.*
Jos kullakin f_j *:llä on vain äärellinen määrä nollakohtia välillä* I*, niin funktiot* $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *ovat LRT, mikäli vakiovektorit* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *ovat LRT.*

Tod: *Koska väli* I *on ääretön ja nollakohtia on yhteensä vain äärellinen määrä, voidaan valita (jopa äärettömällä valinnanvapaudella) piste* $t_0 \in I$*, jossa* $f_j(t_0) \neq 0 \quad \forall j = 1 \ldots n$*. Jos nyt*

$$c_1\, f_1(t)\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\, f_n(t)\mathbf{v}_n = 0 \quad \forall t \in I,$$

niin erityisesti

$$c_1\, f_1(t_0)\, \mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\, f_n(t_0)\, \mathbf{v}_n = 0$$

Koska $\mathbf{v}_j$ *:t LRT ja jokainen* $f_j(t_0) \neq 0$*, on oltava* $c_1 = \ldots = c_n = 0$. □

Huom: Tätä lemmaa sovelletaan usein tilanteessa, jossa $f_j(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Lemma 2.3 (LRT-lemma 2) *Vektorifunktiot* $\mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ *ovat LRT välillä* I*, jos vektorit* $\mathbf{x}_1(t_0), \ldots, \mathbf{x}_n(t_0)$ *ovat LRT vektoreita jossain välin pisteessä* $\mathbf{t}_0 \in I$*.*

Tod: *Tämä on ihan oikeasti triviaali:*
Jos $c_1\, \mathbf{x}_1(t) + \ldots + c_n\, \mathbf{x}_n(t) = 0 \quad \forall t \in I$*, niin tokihan tuo yhtälö pätee erityisesti, kun sijoitetaan* $t = t_0$*. Siispä oletuksen mukaan* $c_1 = \ldots c_n = 0$. □

Huomautus 2.1 *Näillä pärjätään oikein hyvin. Emme tarvitse misään käsitettä* Wronskin determinantti*, jota kirjallisuudessa tällä kohdalla kovin innokkaasti tarjoillaan. Toki siihen vetoaminen ei ole kiellettyä.*
Tavallisesti jälkimmäisessä muodossa otetaan $t_0 = 0$*, joka tulee luontevasti käyttöön, kun käytetään alkuehtoja. (Jos nollassa lasketut vektorit eivät olisi LRT, ei alkuehtoja voitaisi aina toteuttaa.)*

3 Perusteoriaa

Kts. KRE 3.2. s. 159 alk.

Diffyhtälösysteemi:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(t, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

Vektorimuodossa: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.
Alkuarvoprobleema: Diffyhtälö ja ehdot: $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$. (annettu vektori)

Lineaarinen systeemi:

$\mathbf{y}' = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t)$ (EHY) (epähomog.)

$\mathbf{y}' = A(t)\,\mathbf{y}$ (HY) (homog.)

Ratkaisun olemassaololause yleisille on luonteeltaan lokaali. Tässä otetaan vain lineaaristen systeemien lause, joka on muotoilultaan yksinkertainen ja johtopäätökseltään globaali, ts. johtopäätös pätee samalla (isolla) välillä kuin oletuskin.

Lause 3.1 *Jos $a_{ij}(t)-$ funktiot ja $\mathbf{g}(t)$ ovat jatkuvia välillä $I = (a, b)$, niin lineaarisen systeemin alkuarvotehtävällä*

$$\mathbf{y}' = A(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \quad \textit{on annettu vektori}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu koko välillä I.

Lause 3.2 *Jos funktiot $\mathbf{y}_1(t)$ ja $\mathbf{y}_2(t)$ toteuttavat (HY):n, niin niiden lineaarikombinaatio toteuttaa myös, ts. $\mathbf{y}(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + c_2\,\mathbf{y}_2(t)$ toteuttaa myös. (LA:n kielellä: ratkaisujoukko on aliavaruus)*

Tod. *Olkoot $\mathbf{y}_1$ ja $\mathbf{y}_2$ (HY):n ratkaisuja.*

$$\mathbf{y}'(t) = c_1\,\mathbf{y}_1'(t) + c_2\,\mathbf{y}_2'(t) = c_1\,A\,y_1(t) + c_2\,A\,\mathbf{y}_2(t) = A(c\,y_1(t) + c_2\,\mathbf{y}_2(t)) = A\,\mathbf{y}(t).$$

Siinäpä se. □

Kaiken perusta on tämä:

Lause 3.3 *Jos vektorifunktiot $\mathbf{y}_1(t), \ldots, \mathbf{y}_n(t)$ ovat (HY):n LRT ratkaisuja, niin jokainen ratkaisu $\mathbf{y}(t)$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa:*

$$\mathbf{y}(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + \ldots + c_n\,\mathbf{y}_n(t)$$

(LA:n kielellä: ratkaisuavaruuden dimensio $= n$)

Tod: *Saadaan olemassaolo-ja yksikäsitteisyyslauseesta* **??**. *Todistus on oikein nautittava, mutta jätämme sen kuitenkin tällä kertaa. Periaate ... (täydennän kun/jos ehdin)*

□

(HY):n yleinen ratkaisu:

Ratkaisuparvea $\mathbf{y}_h(t) = c_1\,\mathbf{y}_1(t) + \ldots + c_n\,\mathbf{y}_n(t)$ sanotaan (HY):n yleiseksi ratkaisuksi, se siis sisältää kaikki (HY):n ratkaisut.

Perusmatriisi, Wronskin determinantti:

$$Y(t) = [\mathbf{y}_1(t) \quad \mathbf{y}_2(t) \quad \ldots \quad \mathbf{y}_n(t)],$$

missä $\mathbf{y}_j(t)$:t LRT.

$$W(t) = \det(Y(t)),$$

myös vaikka ratkaisut eivät olisi LRT. Jos $W(t) \neq 0$, niin LRT ja siis perusmatriisi. Kuten sanottu, pärjäämme oikein hyvin LRT-lemmoilla tarvitsematta edes tuntea käsitettä "Wronski". Toisaalta sitä saa toki käyttää. Siihen liittyvä "ihme"on, että $W(t) = 0 \quad \forall t \in I \iff W(t) = 0$ jollain $t \in I$.

4 Vakiokertoimiset homogeeniyhtälöt, faasitaso

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y} \qquad (HY)$$

Aivan kuin edellä johdantoesimerkissä, sijoitetaan yrite $\mathbf{y} = e^{\lambda t}\mathbf{x} \implies \lambda e^{\lambda t}\mathbf{x} = e^{\lambda t} A\,\mathbf{x} \;\; \forall t \in I$.

Johdutaan ominaisarvotehtävään: $A\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$. Sen ratkaisuina saatavien $(\mathbf{x}_j, \lambda_j)$ avulla saadaan ratkaisut
$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda_j t}\mathbf{x}_j$.

Kaikki on helppoa, jos on n kpl. LRT ominaisvektoreita.
Tällöin LRT-lemma (kumpi vain) kertoo heti, että funktiot
$\mathbf{y}_k(t) = e^{\lambda_k t}\mathbf{x}_k$ ovat LRT.

Päälauseen **??** mukaan kaikki ratkaisut saadaan parvesta:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{x}_n$$

Lause 4.1 *(EHY):n yleinen ratkaisu saadaan lisäämällä (HY):n yleiseen ratkaisuun jokin (EHY):n erityisratkaisu. Ts. jos $\mathbf{y}_h = c_1\,\mathbf{y}_1 + \ldots + c_n\,\mathbf{y}_n$ ja jos $\mathbf{y}_p$ on jokin (EHY):n ratkaisu, niin $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$ on (EHY):n yleinen ratkaisu, eli sisältää kaikki ratkaisut.*

Tod. *1. Toteuttaa, sillä olkoon $\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$. Nyt*
$\mathbf{y}' = \mathbf{y}_h' + \mathbf{y}_p' = A\,\mathbf{y}_h + A\,\mathbf{y}_p + \mathbf{g} = A(\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p) + \mathbf{g} = A\,\mathbf{y} + \mathbf{g}$,
joten $\mathbf{y}$ toteuttaa kuin toteuttaakin (EHY:)n.

2. Olkoonpa nyt $\mathbf{z}$ mielivaltainen (EHY):n ratkaisu. osoitetaan, että se on yllä olevaa muotoa $\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p$.
Eipä muuta kuin todetaan, että $\mathbf{z} - \mathbf{y}$ on (HY):n ratkaisu, mikä näkyy heti:

$$(\mathbf{z} - \mathbf{y})' = \mathbf{z}' - \mathbf{y}_p' - \mathbf{y}_h' = (A\mathbf{z} + \mathbf{g}) - (A\,\mathbf{y}_p + \mathbf{g}) - A\,\mathbf{y}_h = A(\mathbf{z} - \mathbf{y})$$

Niinpä $\mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{y}_H$ on (HY):n ratkaisu, joten $\mathbf{z} = \mathbf{y}_p + \underbrace{\mathbf{y}_h + \mathbf{y}_H}_{(HY):n \;\; \textit{ratkaisu}}$.

2x2-systeemejä, faasitasoja

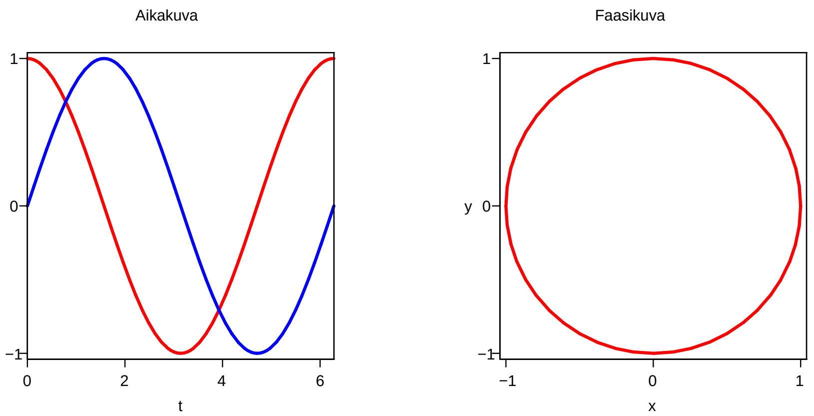
Katsotaan ensin, mikä on "aikatason" ja faasitason suhde. Merkitään havainnollisuuden vuoksi faasitason pisteitä $(x(t), y(t))$. Diffyhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisuja ovat $y_1 = \sin t$ ja $y_2 = cos\,t$. Katsotaan yhtälöä systeeminä, siispä:

Muunnetaan systeemiksi:
$y_1 = y, \quad y_2 = y' = y_1'$, siis: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$

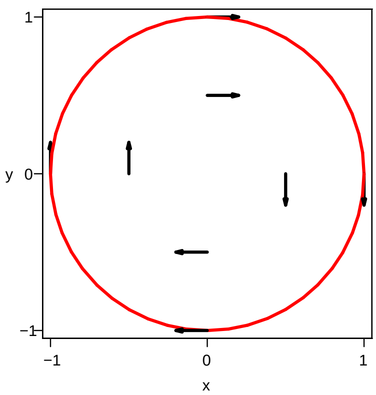
Matriisimuodossa $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$, missä $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Haetaan nyt vain jokin ratkaisu, vaikkapa sellainen, joka toteuttaa alkuehdon $\mathbf{y}(0) = [0, 1]^T$. Ratkaisuksi nähdään heti: $y_1 = sin(t), \quad y_2 = cos(t)$, ts.

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}$$



Faasikuva ja 8 suuntakenttänuolta



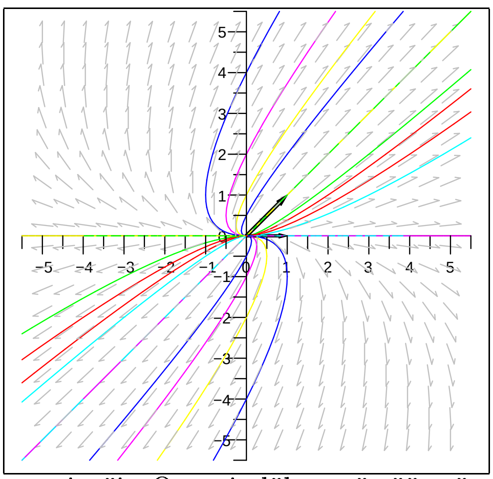

```
 > A=[0 1;-1 0]
A =
   0   1
  -1   0
 > ykspisteet=[0 1 0 -1;1 0 -1 0]
ykspisteet =
   0   1   0  -1
   1   0  -1   0
> A*ykspisteet
ans =
   1   0  -1   0
   0  -1   0   1
```

2×2-systeemien faasitasotyypit

Noodi (lähde)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:
$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{v}_1 = [1, 0]^T$
$\lambda_2 = 2, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$
Molemmat ominaisarvot > 0.



Epästabiili: Trajektorit pakenevat poispäin O:sta ja lähenevät ääretöntä kaikista lähtöpisteistä $\mathbf{x}_0 \neq 0$.

Edellisen yksityiskohdat

Yleinen ratk: $\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_2$.

Ominaisvektorit $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ LRT, joten tässä on kaikki ratkaisut.

Jos "kerrotaan auki", saadaan koordinaattifunktiomuoto:

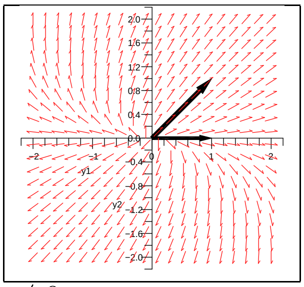
$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\, e^t + c_2\, e^{2\,t} \\ c_2\, e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Tästä voidaan piirtää ratkaisukäyrien (trajektorien) pisteitä kiinnittämällä c_1 ja c_2 ja antamalla arvoja käyräparametrina esiintyvälle t :lle.

Ratkaisujen luonne näkyy parhaiten, kun asettuu katsomaan tilannetta ominaisvektorikantaan, jolloin katsotaan ratkaisua muodossa.

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{z_1(t)} \mathbf{v}_1 + \underbrace{c_2 e^{\lambda_1 t}}_{z_2(t)} \mathbf{v}_2.$$

Merkitään koordinaattifunktioita ominaisvektorikannan suhteen $z_1(t)$ ja $z_2(t)$. Huomaa, että $(c1, c2)$ tarkoittaa alkupisteen koordinaatteja ominaisvektorikannassa.



1. Alkupiste ominaisvektorilla: $c_2 = 0 \implies$
   ollaan (ja pystään) $\mathbf{v}_1$:llä.
   $c_1 = 0 \implies$ pysytään $\mathbf{v}_2$:lla.
   Ratkaisupiste pysyy ominaisvektorilla, etäisyys O:sta
   $|c_1|e^{\lambda_1 t} \to \infty$, kun $t \to \infty$, koska $\lambda_1 > 0$.
   Aivan samoin $\mathbf{v}_2$ ja λ_2.

2. Alkupiste ei kummallakaan ominaisvektorilla: $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

$z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$.
Tämän esimerkin tapauksessa $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, jolloin $z_2 = K\, z_1^2$, missä $K = \frac{c_2}{c_1^2}$.

Ominaisvektorikannassa kyse on siis paraabeliparvesta. Tarkkaan ottaen kukin trajektori on paraabelin haara , joka lähestyy O:a, kun $t \to -\infty$ ja lähestyy ääretöntä, kun $t \to \infty$.

Miten ominaisarvot vaikuttavat trajektorien muotoon?

Mitä, jos edellä olisi ollut $\lambda_2 = 3\,\lambda_1$?
No silloin olisi saatu kuutioparaabeleja: $z_2 = K z_1^3$.
Yleisesti: Jos $\lambda_2 = p\,\lambda_1$, saadaan käyriä:
$z_2 = K z_1^p$, missä p voi yleisesti olla kokonaisluvun lisäksi mikä tahansa positiivinen reaaliluku.

Mitä, jos $\lambda_1 = \lambda_2$? Siitä harjtehtävä AV:lla (tapauksessa: 2 LRT ominaisvekt.)

Muut reaaliset ominaisarvoyhdistelmät

1. Jos $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, niin edellisessä ei muutu mikään muu kuin nuolien suunta. Kaikki virtaa O:oon päin.

2. Reaaliset ja erimerkkiset. Jos $\lambda_2 = -p\,\lambda_1$, saadaan

$$\mathbf{z}_2 = \frac{K}{z_1^p},$$

jolloin trajektorit ovat "hyperbelinomaisia".
Toista ominaisvektoria ($\lambda > 0$ pitkin kuljetaan poispäin O:sta ja toista ($\lambda < 0$) origoon päin.

Noodi (nielu)

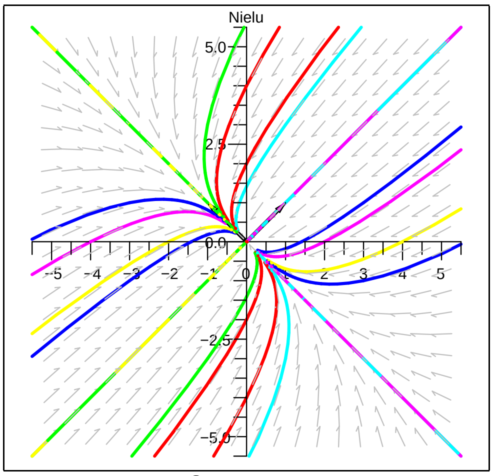
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$\lambda_1 = -1, \quad \mathbf{v}_1 = [-1, 1]^T$

$\lambda_2 = -3, \quad \mathbf{v}_2 = [1, 1]^T$

Molemmat ominaisarvot < 0.



Stabiili (vahvasti): Trajektorit virtaavat kohti O:a. kaikista lähtöpisteistä $\mathbf{x}_0 \neq 0$.

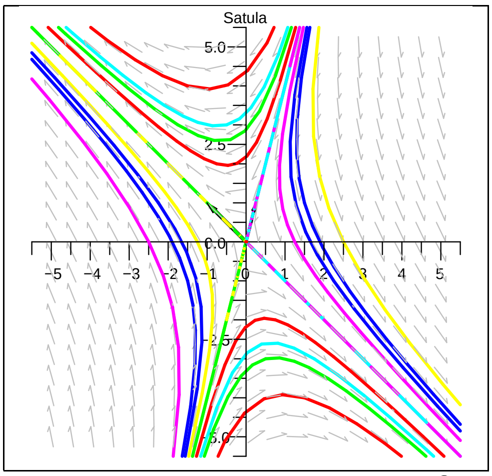
Satula

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$\lambda_1 = -2, \quad \mathbf{v}_1 = [4, 1]^T$

$\lambda_2 = 3, \quad \mathbf{v}_2 = [-1, 1]^T$



Epästabiili: Osa trajektoreista $\to \infty$, lähdettiinpä miten läheltä O:a tahansa (erit. posit. ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin pisteistä).

Spiraali (lähde tai nielu)

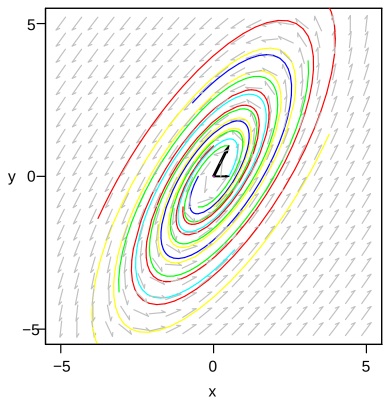
$$A = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 16 & -7 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:

$\lambda_1 = 1 + 8\,i, \quad \mathbf{v}_1 = [1 + i, 2]^T$

$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1}$

$Re\lambda_1 (= Re\lambda_2) > 0$



Epästabiili: Kaikki trajektorit kiertävät laajenevaa spiraalia $\to \infty$, lähdettiinpä miten läheltä O:a tahansa
Jos olisi $Re\lambda_1 (= Re\lambda_2) < 0$, niin ___

Yleinen ratk:

Merk. $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u} = Re\,\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = Im\,\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = \lambda_1$.

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{w} + c_2 e^{\overline{\lambda} t}\overline{\mathbf{w}} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(8t) & \sin(8t) \\ -\sin(8t) & \cos(8t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

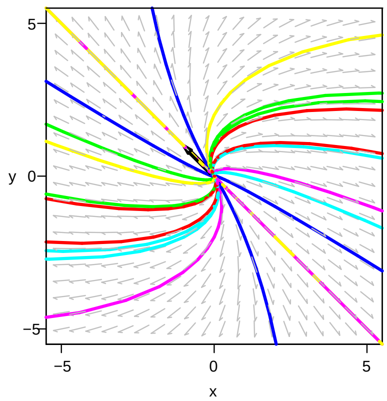
Voidaan kirjoittaa myös muotoon:

$$\mathbf{y}(t) = e^t \left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(8t) - \sin(8t) \\ 2\cos(8t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin(8t) + \cos(8t) \\ 2\sin(8t) \end{bmatrix} \right)$$

Degeneroitunut lähde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ominaisarvot ja -vektorit:
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 3$, $\mathbf{v} = [-1, 1]^T$
Vain 1−dim ominaisavaruus.



Epästabiili: Kaikki trajektorit $\to \infty$ Jos olisi $\lambda < 0$, niin ___