alkaen L 13, to 30.11.06

1 Differentiaaliyhtälösysteemien kvalitatiivisia menetelmiä

1.1 Kriittiset pisteet, stabiilisuus

KRE 3.4, 3.5

Kvalitatiivisia johtopäätöksiä voidaan tehdä suoraan yhtälöstä ratkaisematta sitä. Yksinkertainen esimerkki kvalitatiivisesta johtopäätöksestä olisi vaikka seuraavanlainen. Katsellaan skalaariyhtälöä $y' = 1 + y^2$. Koska oikea puoli on positiivinen aina, on ratkaisufunktion derivaatta $y'(t) > 0$, joten kaikki ratkaisut ovat kasvavia funktioita. Toinen johtopäätös saadaan siitä, että oikea puoli riippuu vain y : stä, eikä ollenkaan t :stä. Jos piirretään $ty-$tasoon suuntakenttä, niin suuntanuolet riippuvat vain y-arvosta, joten suuntakenttä saadaan siirtämällä $y-$akselin suuntaista suoraa suuntanuolineen $t-$akselin suunnassa. Tämä on yleinen ominaisuus kaikille ns. *autonomisille* yhtälöille.

Kvalitatiivisiin menetelmiin kuuluvat myös esim. ratkaisujen muotoon liittyvät yleisluonotoiset geometriset johtopäätökset, esimerkiksi sellaiset, joita teimme lineaaristen yhtälöiden yhteydessä ominaisarvojen perusteella.

- Yleinen diffyhtälösysteemi $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$
- Autonominen systeemi $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ (ei riipu eksplisiittisesti t :stä)
- Lineaarinen vakiokertoiminen homogeninen $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$.

Kvalitatiiviset menetelmät soveltuvat parhaiten autonomisiin. Tällöinhän suuntakenttä määräytyy pelkästään paikan perusteella. Havainnollistetaan hiukan tuonnempana vielä autonomisen ja ei-autonomisen systeemin eroa. Todetaan tässä, että epäautonomisen systeemin suuntakenttä ja faasitaso riippuvat ajasta. Siksi ne pitäisi kuvata $xyt-$faasiavaruutena eikä tasona. Näinhän menetellään skalaariyhtälön tapauksessa, kun piirretään suuntakenttä ja ratkaisukäyrät $ty-$tasoon. Autonomisessa tapauksessa voitaisiin trajektoria kuvata yksiulotteisena, $y-$akselia pitkin tapahtuvana liikkeenä.
Kahden ja useamman yhtälön ja muuttujan tapauksessa geometrinen analyysi on ei-autonomisille aika mutkikasta, emmekä siihen tässä mene.

Tuntemistamme systeemeistä ei-autonomisia ovat lineaariset epähomogeeniset ja lineaariset (myös homogeeniset), joiden kerroinmatriisi $A(t)$ riippuu ajasta t.

1.2 Autonomisten systeemien käsitteistöä

Olkoon tästedes (kunnes toisin sanotaan) systeemimme autonominen:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

Ratkaisufunktio on vektorifunktio $t \to \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$.

Koordinaattifunktioiden kuvaajat voidaan piirtää aikatasoon, jonka vaaka-akselina on aika t. Vektorifunktio $t \to \mathbf{y}(t)$ voidaan toisaalta piirtää faasitasoon parametrimuodossa annettuna käyränä, kun parametrina on t.
Se voidaan ajatella massapisteen radaksi, eli **trajektoriksi** tasossa, jonka koordinaatteina ovat paikka ja nopeus.

Kriittiset pisteet

Vektorifunktion derivaatta $\mathbf{y}'(t)$ ilmaisee käyrän $\mathbf{y}(t)$ tangentin suunnan ajanhetkellä t. Autonominen systeemimme $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(y)$ kertoo siis tangentin suunnan annetussa pisteessä $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, mikäli $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(y) \neq 0$.

Erikoisasemassa ovat siten pisteet $\mathbf{y}$, joissa $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$. Nämä ovat **kriittisiä pisteitä** (KRP) eli **tasapainopisteitä (TP)** .

Jos $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a \\ \\ b \end{bmatrix}$ on (KRP), niin vakiofunktio $\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) = a \\ \\ y_2(t) = b \end{bmatrix}$.

on yhtälön ratkaisu (vakion derivaatta on 0, oikea puoli on 0, koska KRP).

Aikatasossa kuvaajat ovat siten suorat $y_1 = a$ ja $y_2 = b$. Faasitasossa trajektorina on yksi piste, $\mathbf{c} = (a, b)$.

Kriittinen piste $\mathbf{y}_0$ on

> **stabiili**, jos lähelle $\mathbf{y}_0$:aa tulevat trajektorit pysyvät lähellä $\mathbf{y}_0$:aa, kun $t \to \infty$,
>
> **stabiili ja attraktiivinen** (vahvasti stabiili), jos lähelle $\mathbf{y}_0$:aa tulevat trajektorit lähestyvät $\mathbf{y}_0$:aa, kun $t \to \infty$.

Yllä olevat määritelmät eivät ole täsmällisiä matemaattisia määritelmiä. Tarkat määritelmät kuvineen: KRE s. 172

1.3 Yhteenveto lineaarisista homogeenisista

KRE 3.5

$$\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}, \quad A(2 \times 2).$$

Edellä esitettiin ratkaisut kuvineen kaikkiin tapauksiin. Kerrataan ja otetaan mukaan stabiilisuus.

Kyseessähän on autonominen yhtälö. Jos oletamme, että A on kääntyvä, sen ainoa KRP on O. Jos A ei ole kääntyvä, on kriittisiä pisteitä kokonaisen suoran tai koko tason verran, nämä tapaukset suljetaan pois analyysistamme. Toisin sanoen emme ota tässä mukaan tapausta, jossa ominaisarvo on 0.

Korostamme sitä, että johtopäätökset ovat helposti ja luontevasti luettavissa ominaisarvoista, tämän lukutaidon vaadimme osattavaksi.
(Mielipide: Asia peitetään KRE-kirjassa tässä kohdassa ulkolukutyylisiin p, q, Δ-ehtoihin. Niiden ulkoa opettelusta ei tällä kurssilla pisteitä heru. Toki toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksia saa mieluusti käyttää hyväksi, mutta päättelyn tulee kulkea ominaisarvojen kautta.)

Ratkaisuthan ovat aina muotoa:

$$\mathbf{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{x}_2, \quad 2 \text{ LRT om. vekt.} \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2.$$

tai jos on vain yksi LRT ominaisvektori, niin

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\mathbf{x} + c_2 e^{\lambda t}(t\,\mathbf{x} + \mathbf{u}),$$

missä $\mathbf{x}$ on λ :aan liittyvä ominaisvektori ja $\mathbf{u}$ yleistetty ominaisvektori.

Jos on kompleksinen ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\beta$, jolloin kyse on aina edellisestä tapauksesta, voidaan ratkaisut kirjoittaa reaalisen muotoon:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\alpha t}[\mathbf{u} \quad \mathbf{v}] \begin{bmatrix} \cos(\beta\, t) & \sin(\beta\, t) \\ -\sin(\beta\, t) & \cos(\beta\, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c1 \\ c2 \end{bmatrix}$$

Näistä voidaan päätellä ainoan KRP:n O :n stabiilisuuskäytös heti:

1. Reaaliset ominaisarvot, 2 LRT ominaisvektoria
   (a) $\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0$ Lähdenoodi, epästabiili, kaikki trajektorit, jotka eivät kulje

O:n kautta, lähestyvät $\to \infty$.

(b) $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0$ Nielunoodi, vahvasti stabiili. Kaikki trajektorit, jotka eivät kulje O:n kautta lähestyvät $\to \infty$.

(c) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (erimerkkiset) Satula, epästabiili. Kaikki trajektorit, paitsi ne, jotka kulkevat negatiivista ominaisarvoa vastaavan ominaisvektorin pisteen (tai O:n) kautta, lähestyvät $\to \infty$. (Epästabiilisuuteen riittää, että on yksikin trajektori, joka kulkee mielivaltaisen läheltä O:a ja lähestyy ääretöntä, kun $t \to \infty$. Helpoin esimerkki: positiivista ominaisarvoa vastaava ominaissuora.)

2. Reaalinen kaksinkertainen ominaisarvo λ , 1 LRT ominaisvektori
   (a) $\lambda > 0$ Degeneroitunut lähdenoodi. Kaikki trajektorit (paitsi O) $\to \infty$, kun $t \to \infty$. Epästabiili.
   (b) $\lambda < 0$ Degeneroitunut nielunoodi. Kaikki trajektorit (jopa O) $\to \mathbf{0}$, kun $t \to \infty$. Vahvasti stabiili.

   Huom: raja-arvokäytöksen muotoa $t\, e^{\lambda t}$ olevassa termissä määrää eksponenttifunktio, polynomitekijä (tässä t) on "hyttysen surinaa"sen rinnalla.
3. Kompleksiset ominaisarvot, $\lambda = \alpha \pm i\beta$

(a) $\alpha > 0$ Lähdespiraali, epästabiili,

(b) $\alpha < 0$ Nieluspiraali, vahvasti stabiili

(c) $\alpha = 0$ Keskus, stabiili.

Huom 1) Keskuksen avulla on helppo selittää yleinen stabiilisuuskäsite tarkemmin. Jos valitaan (mielivaltaisen pieni) O :n $\epsilon-$säteinen ympäristö, niin on olemassa sellainen $\delta-$säteinen ympäristö, että jokainen $\delta-$ ympäristöön jollain ajanhetkellä tunkeutuva trajektori pysyy ikuisesti tuossa ennalta annetussa $\epsilon-$säteisessä ympäristössä.
Tässä tapauksessa, kun on annettu $\epsilon-$kiekko, valitaan ellipsin isoakseli korkeintaan ϵ :n suuruiseksi. Tällöin voidaan valita δ pikkuakselin suuruiseksi (tai pienemmäksi), jolloin jokainen $\delta-$kiekkoon tunkeutuva trajektori pysyy kokonaisuudessaan ikuisesti $\epsilon-$ympäristön sisällä.

Toisen asteen yhtälön juurien ominaisuuksien hyväksikäyttö

Tämä on toki sallittua, miksei jopa suositeltavaakin, jos se laskuja lyhentää. Mutta, se on vain apukeino, jolla päästään käsiksi ominaisarvojen käyttäytymiseen. Toisinaan ominaisarvojen laskeminen tai johtopäätösten teko suoraan 2. asteen yhtälön ratkaisukaavasta saattaa olla jopa lyhyempikin tapa.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2.$$

Toisaalta

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}a_{12} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A)$$

Tästä nähdään, että $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = \mathrm{tr}(A)$ ja $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$. Tarvitaan tietysti myös diskriminantti Δ.

Faasitasotyyppien muuttuminen koordinaatistossa, jonka akseleina ovat $\mathrm{tr}(A)$ ja $\det(A)$ on hieno, hauska ja viihdyttävä kuva ja esitys asiasta, kts. KRE-kirja. Emme kuitenkaan tällä kertaa paneudu siihen lähemmin.

1.4 Linearisointi

Autonominen DYS. Merkitään vaihteeksi $y_1 = x, \quad y_2 = y$, jne.

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y). \end{cases}$$ Olkoon (a,b) kriittinen piste (KRP), ts. $f(a,b) = g(a,b) = 0$.

Pisteessä (a,b) linearisoitu systeemi tarkoittaa systeemiä

$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, missä $u = x - a, \quad v = y - b$ ja A on Jacobin matriisi:

$$A = J_F(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{bmatrix}_{x=a, y=b}$$

Tämä tarkoittaa vektorifunktion $(x,y) \to \begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$

approksimointia 1. asteen Taylorin polynomilla. Samalla suoritetaan KRP:n siirto origoon.

Linearisoitu systeemi kuvaa alkuperäistä systeemiä sitä paremmin, mitä pienempiä ovat $|u|$ ja $|v|$.

Onko linearisoidun systeemin O:n luonne aina sama kuin alkuperäisen systeemin ao. KRP:n luonne?

Voidaan osoittaa, että yleensä on, mutta kaksi poikkeusta:

1. A:n ominaisarvot ovat puhtaasti imaginaariset, eli A:n KRP:n (O) tyyppi on *keskus*
2. A:lla on kaksinkertainen ominaisarvo ja yksi ominaisvektori, eli A:n KRP:n (O) tyyppi on degeneroitunut noodi.

Toki näissäkin tapauksissa tyyppi voi säilyä, mutta epälineaarisen KRP:n tyyppi voi myös olla spiraali.

Autonomisen ja epäautonomisen havainnollistusta

Havainnollistetaan eroa kahdella yksinkertaisella esimerkillä.

Esim1, autonominen

$$x' = x, \quad y' = y$$

(Lineaarinen vakiokertoiminen, diagonaalinen, matriisi jopa yksikkömatriisi.)

Ratkaistaan alkuarvotehtävä $x(s) = 1, \quad y(s) = 2$, missä $s = t_0$ on siis alkuhetki.

Saadaan ratkaisu: $x = e^{t-s}, \quad y = 2e^{t-s}$.

Nyt $t - s$ voidaan ottaa uudeksi käyräparametriksi $u = t - s$, jolloin ajan alkuhetki s ei näy ratkaisussa lainkaan. Ratkaisutrajektori voidaan jopa kirjoittaa muotoon $y = 2\,x, \quad x \geq 1$. Pisteen $x = 1, \quad y = 2$ (kuten minkä tahansa muun tason pisteen) kautta kulkee täsmälleen yksi trajektori, joka on riippumaton siitä, mikä ajanhetki valitaan alkuhetkeksi.

Asiaa voidaan katsoa myös yhtälösysteemistä suoraan: Pisteessä $x = 1, \quad y = 2$ ratkaisukäyrän suuntavektori on $(x', y') = (x, y) = (1, 2)$, riippumatta $t-$arvosta, joka ei yhtälössä mitenkään ole näkyvissäkään.

Ei-autonominen

$$x' = x/t, \quad y' = y, \text{ts. } A = \begin{bmatrix} 1/t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

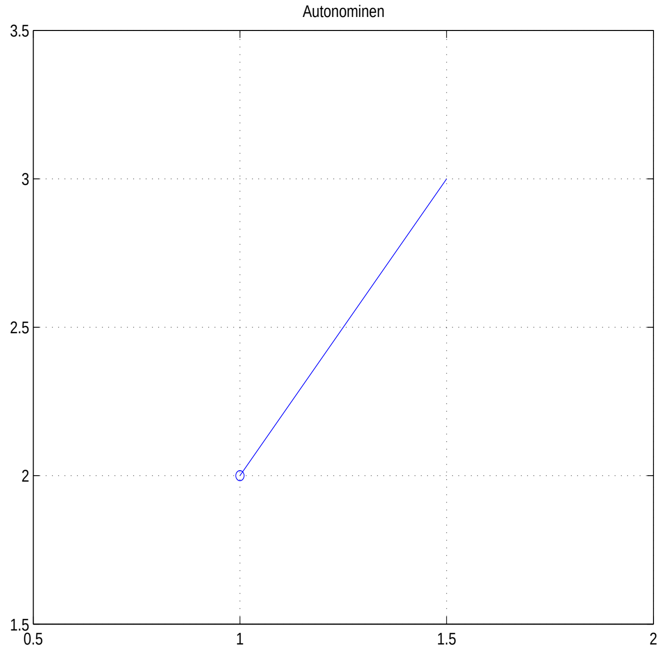
Ratkaisu: $x = t/s, \quad y = 2\,e^{t-s}$

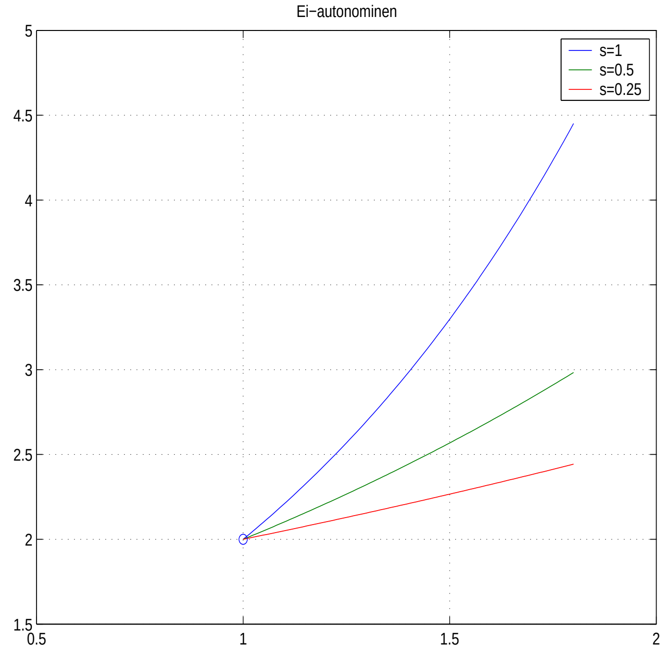
Jos tästä eliminoidaan t, saadaan:

$y = 2e^{s(x-1)}$, joten alkuaika s on mukana ratkaisussa. Nyt jokaisen tason pisteen kautta kulkee äärettömän monta trajektoria.

Suoraan yhtälöstä: Tangentin suunta pisteessä $t = s, x = 1, y = 2$ on $(1/s, 2)$, eli kulmakerroin on $2\,s$.

Oheiset kuvat valaisevat asiaa:





Trajektori ei riipu alkuhetkestä s Alkuhetket $s = 1, \quad s = 0.5, \quad s = 0.25$

Faasitasoanalyysi soveltuu siksi juuri autonomisiin systeemeihin. Jos vastaavaa halutaan tehdä ei-autonomisille, on faasitason sijasta tutkittava faasiavaruutta, jossa on aika-akseli kolmantena koordinaattina ja kukin kiinteä ajan arvo määrää oman faasitasonsa, aikasiivun koko $xyt-$ avaruudesta.