Teknillinen korkeakoulu Apiola/Häme
Matematiikka

Mat-1.1332 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

Laskuharjoitus 3 (viikko 47 , 20 – 24.11.2006)

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/`
Ominaisarvopruju: `.../L/ominaisarvot.pdf` (Edita-jaossa)
Ominaisarvoteoriaa: Lay: Ch 5, alk. s. 327, [KRE] Ch 7, alk. s. 370.

Alkuviikko

1. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit. Piirrä koordinaatistoon ominaisvektorit $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$ sekä $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ ja $\lambda_2 \boldsymbol{v}_2$.

2. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja suurinta ominaisarvoa vastaavan ominaisavaruuden kanta(vektori). Tarkista, että ominaisarvo/vektori-määritelmän ehto toteutuu.

   Neuvo: Kehitä determinantti sen rivin/sarakkeen suhteen, jossa on eniten nollia.
   Vast: Kysytty ominais(kanta)vektori: $[-1, 1, 1]^T$

3. Määritä h matriisissa $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ niin, että ominaisarvoa $\lambda = 5$ vastaava ominaisavaruus on $2-$ulotteinen. Mitä voit tällöin sanoa tämän ominaisarvon algebrallisesta kertaluvusta, ja minkälainen tekijä siis esiintyy karakterisitisessa polynomissa?

4. Määritä seuraavien lineaarikuvausten ominaisarvot ja -vektorit laskematta, pelkän geometrisen kuvailun perusteella.

   (a) Peilaus y-akselin suhteen tasossa $\mathbb{R}^2$,
   (c) Matriisilla $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ kertominen.
   (c) Heijastus yz-tason suhteen $\mathbb{R}^3$:ssa.
   (d) Kohtisuora projektio y-akselille $\mathbb{R}^2$:ssa.

   (Laskeminen LV-tehtäväksi)

5. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit.

   Ohje: Kompleksitapauksessa on erityisen hyödyllistä huomata, että $2 \times 2-$matriisin ominaisvektori määräytyy suoraan jommasta kummasta yhtälöstä, ei siis tarvita rivioperaatioita. (Kts. myös yleisiä ohjeita.)

6. Matriisilla $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ on kaksinkertainen ominaisarvo $\lambda = 1$. Määritä sitä vastaavan ominaisavaruuden kanta.
   Mitkä ovat ominaisarvojen algebralliset kertaluvut M_λ ja geometriset m_λ?
   Vihje: Toista ominaisarvoa ja vastaavaa ominaisvektoria ei tarvitse laskea (ellet välttämättä halua).

Loppuviikko (7)

1. Laske AV-tehtävän 4 ominaisarvot.

2. Stokastinen matriisi P tarkoittakoon sellaista, jonka alkiot ovat ei-negatiivisia ja sarakesummat $= 1$. [1] Osoita, että 1 on aina P:n ominaisarvo.
   Vihje: Väite on helppo osoittaa transposille P^T, ajattele ominaisvektorin määritelmää ja mitä saat, jos kerrot P^T:llä vektorin $[1, 1, \ldots, 1]$.

3. Eräässä valtiossa pidettiin parlamenttivaalit kolmen puolueen P_1, P_2, P_3 kesken. Puolueiden kannatusosuuksien viikoittaista muutosta vaaleja edeltävän puolen vuoden aikana kuvaa siirtymämatriisi $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$.

[1] KRE-kirjassa otetaan rivisummat $= 1$.

(a) Määritä matriisin suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori ja päättele, mitä rajaosuuksia kannatusluvut lähestyvät, kun viikkomäärä kasvaa (tässä ei päästä äärettömyyteen, mutta raja-arvo antaa riittävän tarkan approksimaation).

(b) Kokeile joillain alkujakaumilla $\mathbf{x_0}$ (siis "todennäköisyysvektoreilla", eli sellaisilla, joiden summa $= 1$ (tai 100)) ja laske $x_1 = P\,x_0$, $x_2 = P\,x_1$, $\ldots$, Käytä ihmeessä Octavea/Matlabia! Miten nopeasti pääset lähelle raja-arvoa?

4. (a) Osoita, että jos λ on A:n ominaisarvo ja $\mathbf{x}$ vastaava ominaisvektori, niin λ^k on A^k:n ominaisarvo, ja samainen $\mathbf{x}$ on vastaava ominaisvektori.

   (b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Osoita, että λ^{-1} on A^{-1}:n ominaisarvo ja $\mathbf{x}$ siihen liittyvä ominaisvektori (yhtä hyvin Ax). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?

   Vihje: (a): Tarvitset vain määritelmää.
   Mieti (b)-kohdan loppukysymyksessä: Mitä merkitsee kääntyvyyteen nähden, jos ominaisarvo on 0 ? Ajattele vaikkapa homogeeniyhtälön ratkaisuja tms.

5. Päättele matriisia $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ katsomalla, että se on diagonalisoituva, ja laske diagonalisointiesitystä hyödyntäen A^6.
   Ohje: Ominaisvektorimatriisi on myös kolmiomuotoinen, joten käänteismatriisi saadaan parilla hassulla "alhaalta ylös"rivioperaatiolla. Matriisioperaatioihin (kuten kertolaskuihin) saat toki mieluusti käyttää ohjelmia tai muuta "matriisilaskinta".

6. (a) Olkoon A 5×5-matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Toinen ominaisavaruus on 2- ja toinen 3-ulotteinen. Onko A diagonalisoituva?

   (b) Olkoon A 3×3-matriisi, jolla on kaksi erillistä ominaisarvoa. Kumpaankin liittyvä ominaisavaruus on 1-ulotteinen. (Eli kummankin geometrinen kertaluku $= 1$. Onko A diagonalisoituva?

   (c) Olkoon A 4×4-matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrinen kertaluku $= 1$ ja yhden taas 2. Onko mahdollista, että A ei ole diagonalisoituva?

   (d) Olkoon A 7×7-matriisi, jolla on kolme erillistä ominaisarvoa. Yhden geometrinen kertaluku $= 2$ ja toisen $= 3$. Onko mahdollista, että matriisi ei ole diagonalisoituva?

Ohjeita, ominaisarvo-oppia

- **Ominaisarvo** on luku, se voi olla kompleksiluku, vaikka matriisi olisi reaalinen.

- **Ominaisvektori** on (reaalisen matriisin tapauksessa) $\mathbb{R}^n$:n tai $\mathbb{C}^n$:n vektori sen mukaan, onko vastaava ominaisarvo reaalinen vai kompleksinen.

- Ominais**arvo saa** aivan mainiosti **olla** 0, ominais**vektoriksi emme hyväksy nollavektoria**.

- Ominaisarvoon λ liittyvä **ominaisavaruus** E_λ koostuu kaikista λ:aan liittyvistä ominaisvektoreista ja lisäksi nollavektorista. Tällöin kyseessä on vektori(ali)avaruus, nimittäin matriisin $A - \lambda I$ nolla-avaruus, $N(A - \lambda I)$.

- Ominaisarvon λ_j **algebrallinen kertaluku** M_{λ_j} on karakteristisen polynomin $\det(A - \lambda I)$ juuren kertaluku. **Geometrinen kertaluku** m_{λ_j} on $\dim(E_{\lambda_j})$.
  Pätee: $m_{\lambda_j} \leq M_{\lambda_j}$

- Jos reaalisella matriisilla A on **kompleksinen** ominaisarvo $\lambda = \alpha + i\,\beta$, niin myös $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$ on A :n ominaisarvo. Jos $\mathbf{v}$ on λ :aa vastaava ominaisvektori, niin liittolukua $\overline{\lambda}$ vastaava ominaisvektori on $\overline{\mathbf{v}}$. (Tarkoittaa vektoria, jonka koordinaatit ovat $\mathbf{v}$:n koordinaattien liittolukuja.)

- Jos on määrättävä diagonaalimatriisin ominaisarvot ja -vektorit, niin laskentatyötä ei jää lainkaan. Älä siis suotta ryhdy veivaamaan $\det(A - \lambda I)$:n kautta. (Koko ominaisarvohomman perustavoite on saattaa lineaarikuvauksen matriisi diagonaalimuotoon. Jos se jo on, niin mitään ei tarvitse enää tehdä, kunhan osaat siitä lukea.)

- Kolmiomatriisin (ylä- tai ala-) ominaisarvot ovat diagonaalialkiot. (Siis yleistys edelliselle, tässä tapauksessa ominaisvektoreista ei voida sanoa mitään yleistä.)

- Kun pyydetään laskemaan johonkin ominaisarvoon liittyvät ominaisvektorit, on sopivaa antaa vastaukseksi ominaisavaruuden kanta. Helpoimmin se saadaan antamalla ratkaisun vapaille muuttujille vuorollaan arvot $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ (jos kyseessä on 3-ulotteinen ominaisavaruus). Tässähän on kyse nolla-avaruuden kannan määräämistehtävästä.

- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat `LRT`.

- Diagonalisointi: Annettu A. Etsittävä, jos mahdollista, matriisit V ja D, V kääntyvä ja D diagonaalimatriisi siten, että $A = VDV^{-1}$.
  Jos tehtävänä on diagonalisoida A, etsitään matriisit V ja D ja perustellaan V:n kääntyvyys. (Yleensä ei vaadita V^{-1}:n laskemista ilman eri kehoitusta, tai jatkotehtävän asettamaa tarvetta.)

- Octave/Matlab-komentoa `eig` kannattaa käyttää ainakin tarkistukseen. Muoto `[V,D]=eig(A)` antaa suoraan diagonalisointimatriisit: V :n sarakkeina ominaisvektorit ja D :n diagonaalilla (samassa järjestyksessä) ominaisarvot. Jos A on diagonalisoituva, niin V :n sarakkeet ovat LRT, jolloin voidaan muodostaa V^{-1}; Matlab/Octavella: `inv(V)`.