Teknillinen korkeakoulu — Apiola/Häme
Matematiikka

Mat-1.433/443 Matematiikan peruskurssi KP3-II syksy 2006
`http://www.math.hut.fi/teaching/kp3-ii/`

Laskuharjoitus 2 (viikko 46 , 13 – 17.11.2006)

Kurssin www-sivuja:
Pääsivu: `http://math.tkk.fi/opetus/kp3-ii/`
Octave `http://www.gnu.org/software/octave/` , voit ladata omalle koneellesi (kohta "downloads")
Lyhyt Matlab-opas:
`http://math.tkk.fi/~apiola/matlab/opas/lyhyt/`
Kurssisivu/05: `http://math.tkk.fi/teaching/p3/vanha_index.html`

Alkuviikko

Tehtävät 1 ja 2 ovat taas ja tästedes kotitehtäviä.

1. Selvitä perustellen kysymykset:
   (a) Montako tukisaraketta on $7 \times 5-$matriisilla, jos sen sarakkeet ovat LRT?
   (b) Montako tukisaraketta on $5\times 7-$matriisilla, jos sen sarakkeet virittävät avaruuden $\mathbb{R}^5$?
2. Olkoon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, joka kuvaa vektorin $\boldsymbol{u} = [5, 2]^T$ vektorille $\boldsymbol{w} = [5, 2]^T$ ja vektorin $\boldsymbol{v} = [1, 3]^T$ vektorille $\boldsymbol{z} = [-1, 3]^T$
   Määritä T :n lineaarisuuden perusteella seuraavien vektorien kuvat: $3\,\boldsymbol{u}$, $2\,\boldsymbol{v}$ ja $3\,\boldsymbol{u} + 2\,\boldsymbol{v}$.
3. Osoita, että vektorit $[0, 0, 0, 1]^T$, $[0, 0, 1, 1]^T$, $[0, 1, 1, 1]^T$ ja $[1, 1, 1, 1]^T$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan ja määritä vektorin $\boldsymbol{v} = [-1, 0, 1, 2]^T$ esitys tässä kannassa.
4. Olkoon T lineaarikuvaus, jonka geometrinen kuvailu on annettu seuraavissa eri kohdissa. Määritä kuvauksen matriisi tapauksissa (a) – (e).
   (a) Kierto kulman $\frac{\pi}{4}$ verran ja venytys kertoimella 2 tasossa $\mathbb{R}^2$.
   (b) Kohtisuora projektio y-akselille $\mathbb{R}^2$:ssa,
   (c) Venytys/kutistus kertoimilla $0.5, 1.5, 3$ kussakin koordinaattisuunnassa $\mathbb{R}^3$:ssa,
   (d) Heijastus xy-taon suhteen $\mathbb{R}^3$:ssa,
   (e) Ensin suoritetaan vaakasuora leikkaus ("horizontal shear"), joka kuvaa koordinaattivektorit: $\boldsymbol{e}_1 \mapsto \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2 \mapsto \boldsymbol{e}_2 - 2\,\boldsymbol{e}_1$ ja sen jälkeen heijastus suoran $x_2 = -x_1$ suhteen.

   Ohje (e): Katso, miten kantavektorit e_1 ja e_2 kuvautuvat yhdistetyssä kuvauksessa. Tai: Määritä kummankin kuvauksen matriisi ja kerro ne keskenään.
   Huvi & hyöty : Kokeile Matlab-piirtoa. (Kts. alla olevia ohjeita.)
5. Olkoon $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaarikuvaus ja olkoon $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ LRV vektorijoukko. Selvitä, onko kuvajoukko $\{T\boldsymbol{v}_1, T\boldsymbol{v}_2, T\boldsymbol{v}_3\}$ LRV.

   (Tämä on tosi lyhyt!)

Loppuviikko

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$
   Selvitä A :n sarakkeiden LRT kahdella tavalla:
   (1) Suoraan LRT/LRV-määritelmän mukaan (vektorimuoto matriisimuodoksi)
   (2) Käyttämällä lausetta sec. 1.7 **Theorem 7, s. 68** (Lineaarikombinaatioiden "terästetty muoto".
   Ohje: Jos olisivat LRV, niin jokin olisi edellisten lineaarikombinaatio.
2. Määritä *Gauss–Jordanin* menetelmällä A^{-1}, tai totea, ettei sitä ole, kun
   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$
   Ohje: *Gauss–Jordanin* menetelmä: Liitännäismatriisin oikeaksi puoleksi yksikkömatriisi, *rref* koko hökötykselle, ja simsalabim, oikealle ilmestyy A^{-1}, jos on olemassa.

(Herkistämme myös korvamme perustelulle, miksi tämä taikasauva toimii.)
Erityisen mukava tehdä Matlabilla/Octavella:

```
> A=[2 0 -1;5 1 0;...]; Id=eye(3,3); AId=[A Id]
> rref(AId)
```

Saat tehdä toisen kokonaan ja toisenkin osittain Matlab/Octavella. Jos lasket ohjelmalla, niin tee nyt kuitenkin käsin ainakin pari rivioperaatiota ja selvitä, missä järjestyksessä laskenta tapahtuu (erityisesti siirtymävaihe yläpuolen nollauksen alkaessa).

3. (Singulaariarvohajoitelma). Oletetaan, että neliömatriisilla A $(n \times n)$ on esitys: $A = UDV^T$, missä $U^T U = I$, $V^T V = I$ ja D on diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$. (Voidaan osoittaa, että tällainen esitys, on kaikilla matriiseilla, sitä pidetään yleisesti numeerisen matriisilaskennan tärkeimpänä hajoitelmana. Toki yleisesti $\sigma_k = 0$ saattaa esiintyä jostain k alkaen.)
No niin, osoita, että yllä oleva matriisi A on kääntyvä ja kirjoita käänteismatriisille kaava.

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, missä ”mato” $\sim$ tarkoittaa riviekvivalenssia.
   (a) Määritä sarakeavaruuden kanta ja dimensio.
   (b) Määritä riviavaruuden kanta ja dimensio.
   (c) Määritä nolla-avaruuden dimensio (vain kokonaislukuaritmetiikkaa).

5. Määritä edellisen tehtävän (c)-kohdan $N(A)$:n kanta

6. Olkoon A neliömatriisi, jonka kaikki päälävistäjän alapuoliset alkiot ovat nollia. (Sanotaan: A on yläkolmiomatriisi.) Osoita, että $\det(A)$ on päälävistäjän alkioiden tulo. Osoita sama asia myös alakolmiomatriisille.

Ohjeita

Rivi- ja sarakeavaruudet, nolla-avaruus

$\mathrm{col}(A)$, $\mathrm{row}(A)$ ja $N(A)$ saadaan samasta ref-muodosta, siis vain yhdet ja samat rivioperaatiot kaikkiin tehtäviin.

Muista, mikä ero on rivi- ja sarakeavaruuksien kannoilla. Syy tähän on se, että rivioperaatioissa muodostetaan rivivektorien lineaarikombinaatiota, siis pystytään riviavaruudessa. Sensijaan **rivioperaatioissa ei** yleensä muodostu **sarakevektorien lineaarikombinaatioita**, eihän!
Muista myös, että vektoriavaruuden kanta on kaikkea muuta kuin yksikäsitteinen, oikeita vastauksia on siis paljon. (Yksikäisitteistä on avaruuden vektorin esitys kannan avulla.)
$N(A)$:n kanta saadaan ratkaisemalla homogeeniyhtälö. Merkitse mielellään vapaita muuttujia tyyliin $x_9 = s, \quad x_5 = t, \ldots$. Kirjoita takaisinsijoituksella saamasi ratkaisut niin, että nollat ovat mukana (jos se helpottaa hahmotusta), jolloin on helppo nähdä kantavektorit (jotka on helppo nähdä LRT:ksi).

Lineaarikuvaus määräytyy kantavektorien kuvista. Matriisi peruskantojen suhteen saadaan latomalla kantavektorien kuvat sarakkeiksi.

Tason lineaarikuvaukset ja tietokonegrafiikka

Monikulmio voidaan esittää 2-rivisenä matriisina, jonka sarakkeet edustavat koordinaattipisteitä. Esim. Kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0), (1,1), (1,-1)$ voitaisiin esittää matriisina

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kärkipisteet yhdistetään janalla tässä järjetyksessä. Matlab/Octavessa voidaan nyt piirtää: `> plot(T(1,:),T(2,:))`. Jos tähän sovelletaan lineaarikuvausta, eli kerrotaan matriisilla A, saadaan kuvan kärkipisteet $S = AT$. Matlab/O:lla voitaisiin siten kirjoittaa `> S=A*T; plot(S(1,:),S(2,:))`.